Kinematyka Relatywistyczna

I. CZASOPRZESTRZEŃ

Określenie położenia ciała (np. punktu materialnego) w przestrzeni jest możliwe tylko wtedy, gdy wcześniej dokonamy wyboru **układu odniesienia** (u.o.), to znaczy wybierzemy ciało lub zespół wzajemnie nieruchomych ciał, względem których będziemy określać położenie innych ciał.
Wybieramy pewien punkt O ustalonego u.o. i z punktem tym wiążemy początek **3-wymiarowego układu współrzędnych prostokątnych** wyznaczonego przez trzy wzajemnie prostopadłe osie x, y i z, przecinające się w punkcie O. Do pomiaru czasu potrzebujemy również **sieci wzajemnie nieruchomych i zsynchronizowanych ze sobą zegarów**.

Zdarzeniem nazywamy jakiekolwiek zjawisko fizyczne zachodzące w bardzo małym obszarze przestrzeni (czyli w punkcie) i trwające bardzo krótko.
Dobrym modelem zdarzenia jest *zderzenie* dwóch cząstek elementarnych.
Każdemu zdarzeniu w ustalonym u.o. możemy przyporządkować **trzy współrzędne przestrzenne** x, y, z określające miejsce (czyli punkt), w którym zdarzenie zaszło, oraz **chwilę czasu** t mówiącą, kiedy ono zaszło. Chwilę czasu t nazywać też będziemy **współrzędną czasową** zdarzenia.
Zdarzenie ma bezwzględny (inaczej: **absolutny**) **charakter**, tzn. nie zależy ono od wyboru u.o., natomiast **przyporządkowane zdarzeniu współrzędne przestrzenne i współrzędna czasowa są względne** — ich wartości zależą od wyboru u.o.

Zbiór wszystkich zdarzeń nazywamy **czasoprzestrzenią**.
Czasoprzestrzeń jest 4-wymiarowa — każde zdarzenie jest opisane przez cztery współrzędne: trzy współrzędne przestrzenne i jedną współrzędną czasową.

II. ZASADA WZGLĘDNOŚCI

Pierwsze prawo Newtona (zasada bezwładności):
istnieje inercjalny układ odniesienia.

Inercjalny układ odniesienia (i.u.o.) to układ, względem którego wszystkie ciała nie oddziałujące z innymi ciałami poruszają się jednostajnie i prostoliniowo lub spoczywają.

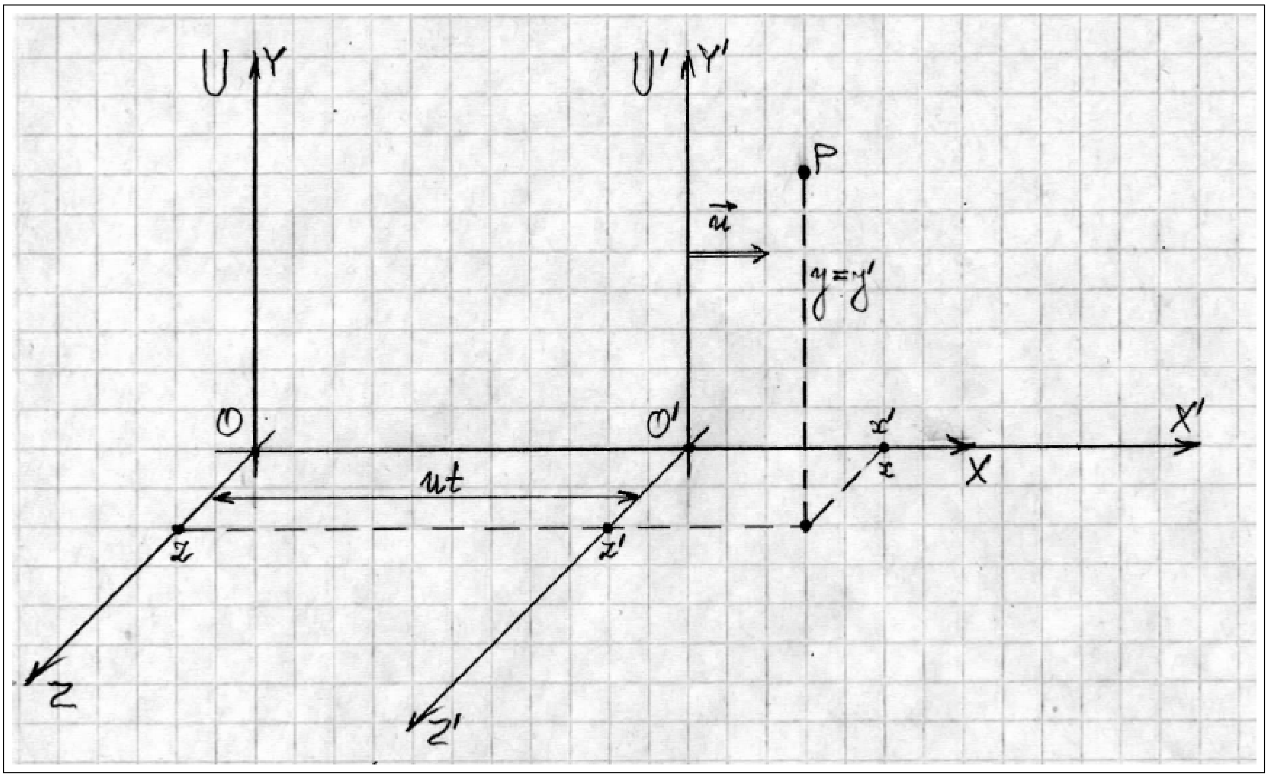
Istnieje nieskończenie wiele i.u.o. — dowolny układ odniesienia, który wykonuje *ruch postępowy prostoliniowy i jednostajny* względem jakiegoś układu inercjalnego, sam jest również układem inercjalnym.

Zasada względności: wszystkie i.u.o. są równouprawnione. Inaczej mówiąc: wszelkie zjawiska fizyczne zachodzące w tych samych warunkach muszą mieć taki sam przebieg w dowolnym i.u.o.

Galileusz: we wszystkich i.u.o. jednakowo słuszne są prawa mechaniki.

Einstein: we wszystkich i.u.o. wszystkie prawa przyrody są takie same.

III. PRZEKSZTAŁCENIE (TRANSFORMACJA) GALILEUSZA



Dwa u.o. U oraz U' poruszają się względem siebie. Oznaczamy przez t, x, y, z współrzędne czasoprzestrzenne zdarzeń względem u.o. U, zaś przez t', x', y', z' współrzędne czasoprzestrzenne zdarzeń względem u.o. U'. Zakładamy, że w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów współrzędnych pokrywają się oraz że układ U' porusza się względem układu U ruchem postępowym prostoliniowym ze stałą prędkością $\vec{u}$ równoległą do osi x:

$$\vec{u} = u\,\vec{i}, \tag{3.1}$$

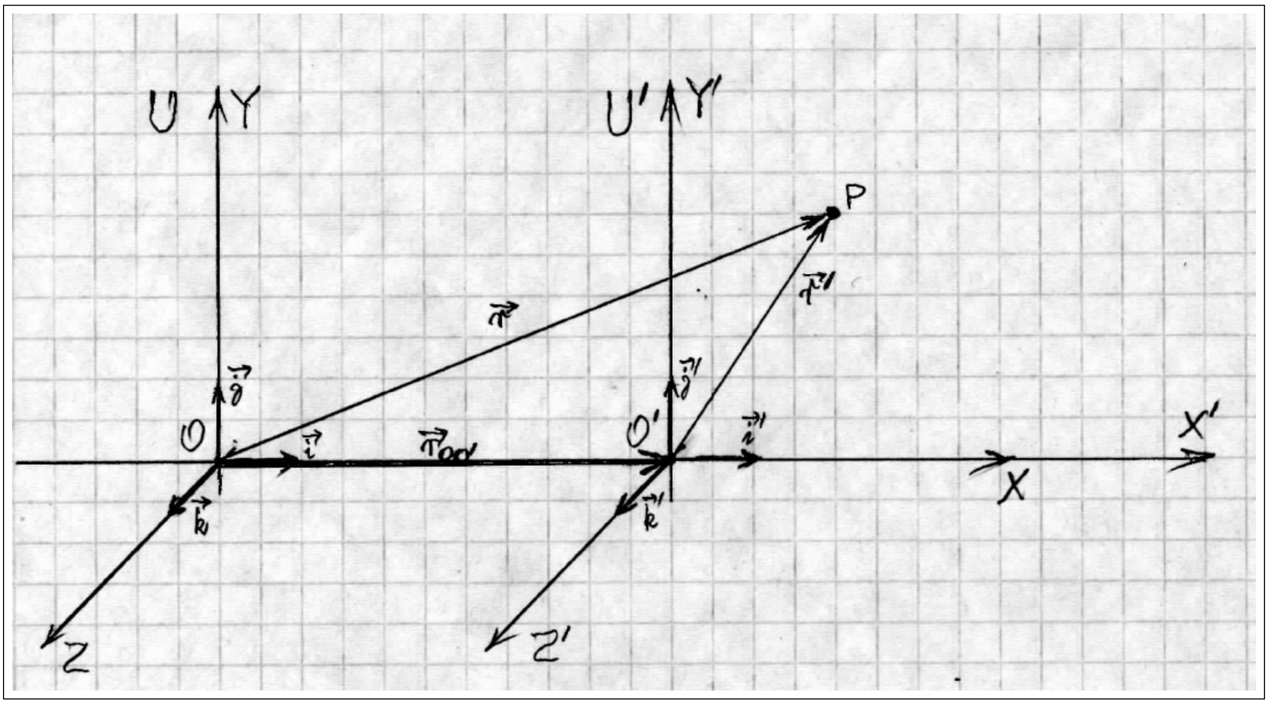
gdzie $\vec{i}$ jest wersorem osi x, zaś u jest *współrzędną* wektora $\vec{u}$ względem tej osi (wielkość u, jako współrzędna wektora względem pewnej osi, może przyjmować wartości ujemne, dodatnie i wartość zero).

Przekształcenie (transformacja) Galileusza:

$$\begin{cases} t'(t,x,y,z) = t, \\ x'(t,x,y,z) = x - ut, \\ y'(t,x,y,z) = y, \\ z'(t,x,y,z) = z. \end{cases} \tag{3.2}$$

Przekształcenie *odwrotne* do przekształcenia (3.2) ma postać (przekształcenie to również nazywamy przekształceniem Galileusza):

$$\begin{cases} t(t',x',y',z') = t', \\ x(t',x',y',z') = x' + ut' = x' + ut, \\ y(t',x',y',z') = y', \\ z(t',x',y',z') = z'. \end{cases} \tag{3.3}$$



Wersory obu układów współrzędnych przestrzennych są odpowiednio równymi wektorami:

$$\vec{i}' = \vec{i}, \quad \vec{j}' = \vec{j}, \quad \vec{k}' = \vec{k}. \tag{3.4}$$

Wektory $\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ i $\vec{r}_{OO'}$ mają następujące współrzędne względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związanej z układem odniesienia U:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = [x, y, z]_U, \tag{3.5a}$$

$$\vec{r}\,' = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}' = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} = [x', y', z']_U, \tag{3.5b}$$

$$\vec{r}_{OO'} = x_{O'}\,\vec{i} = u\,t\,\vec{i} = [u\,t, 0, 0]_U, \tag{3.5c}$$

gdzie notacja $[w_1, w_2, w_3]_U$ oznacza, że liczby w_1, w_2 i w_3 są współrzędnymi pewnego wektora obliczonymi względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związanej z układem U. Korzystając ze wzorów (3.5) łatwo pokażemy, że przekształcenie Galileusza (3.3) w zapisie wektorowym wygląda następująco:

$$\vec{r} = \vec{r}_{OO'} + \vec{r}\,' = \vec{u}\,t + \vec{r}\,'. \tag{3.6}$$

A. Transformacja prędkości punktu materialnego

Prędkość (chwilowa) punktu materialnego względem układu U:

$$\begin{aligned} \vec{v} := \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right)_U &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k} \\ &= v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}, \end{aligned} \tag{3.7a}$$

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \quad v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.7b}$$

Notacja $(\mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t)_U$ oznacza, że pochodna wektora $\vec{r}$ jest obliczana przy założeniu, że wersory $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ związane z układem U **nie zmieniają się w czasie**. Prędkość punktu materialnego względem układu U':

$$\begin{aligned} \vec{v}\,' := \left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{U'} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'\big) \\ &= \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}\vec{i}' + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}\vec{j}' + \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\vec{k}' \end{aligned}$$

$$= v'_{x'}\vec{i}' + v'_{y'}\vec{j}' + v'_{z'}\vec{k}'$$

$$= v'_{x'}\vec{i} + v'_{y'}\vec{j} + v'_{z'}\vec{k}, \tag{3.8a}$$

$$v'_{x'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}, \; v'_{y'} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}, \; v'_{z'} = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}. \tag{3.8b}$$

Prędkość ruchu postępowego układu U' względem układu U możemy obliczyć jako pochodną:

$$\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{OO'}}{\mathrm{d}t}\right)_U = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x_{O'}\vec{i}\right)\right)_U = \frac{\mathrm{d}x_{O'}}{\mathrm{d}t}\vec{i} = u\vec{i} = \vec{u}. \tag{3.9}$$

Względem bazy $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ wektory $\vec{v}$, $\vec{v}\,'$ i $\vec{u}$ mają zatem współrzędne:

$$\vec{v} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right]_U = [v_x, v_y, v_z]_U\,, \tag{3.10a}$$

$$\vec{v}\,' = \left[\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}\right]_U = \left[v'_{x'}, v'_{y'}, v'_{z'}\right]_U\,, \tag{3.10b}$$

$$\vec{u} = [u, 0, 0,]_U. \tag{3.10c}$$

Z transformacji Galileusza (3.3) wynikają następujące związki pomiędzy zmieniającymi się w czasie współrzędnymi wektorów położenia punktu materialnego względem układów U i U':

$$x(t) = x'(t) + ut, \quad y(t) = y'(t) \quad z(t) = z'(t). \tag{3.11}$$

Różniczkując powyższe wzory względem czasu t dostajemy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t} + u, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}. \tag{3.12}$$

czyli

$$v_x = v'_{x'} + u, \quad v_y = v'_{y'}, \quad v_z = v'_{z'}. \tag{3.13}$$

Jest to nierelatywistyczne (czyli newtonowskie) prawo dodawania prędkości. Łącząc powyższe wzory z równaniami (3.10) dostajemy wektorowy zapis prawa dodawania prędkości:

$$\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}. \tag{3.14}$$

B. Transformacja przyspieszenia punktu materialnego

Przyspieszenie (chwilowe) punktu materialnego względem układu U:

$$\vec{a} := \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2}\right)_U = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\right)_U = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{3.15a}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \ a_y = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \ a_z = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}. \tag{3.15b}$$

Przyspieszenie punktu materialnego względem układu U':

$$\begin{aligned} \vec{a}\,' := \left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}\,'}{\mathrm{d}t^2}\right)_{U'} = \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,'}{\mathrm{d}t}\right)_{U'} &= a'_{x'}\vec{i}\,' + a'_{y'}\vec{j}\,' + a'_{z'}\vec{k}\,' \\ &= a'_{x'}\vec{i} + a'_{y'}\vec{j} + a'_{z'}\vec{k}, \end{aligned} \tag{3.16a}$$

$$a'_{x'} = \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v'_{x'}}{\mathrm{d}t}, \ a'_{y'} = \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v'_{y'}}{\mathrm{d}t}, \ a'_{z'} = \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v'_{z'}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.16b}$$

Zauważmy, że przyspieszenie ruchu postępowego układu U' względem układu U jest zerowe:

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}_{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right)_U = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\vec{i})\right)_U = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,\vec{i} = 0\,\vec{i} = \vec{0}. \tag{3.17}$$

Różniczkowanie równań (3.12) względem czasu t prowadzi do związków:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 y'}{\mathrm{d}t^2}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 z'}{\mathrm{d}t^2}, \tag{3.18}$$

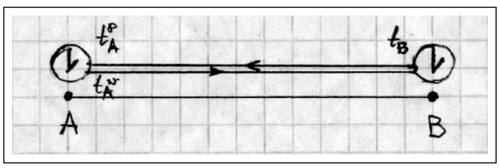
które w zapisie wektorowym oznaczają, że

$$\vec{a} = \vec{a}\,', \tag{3.19}$$

czyli przyspieszenie punktu materialnego jest takie samo we wszystkich i.u.o.

IV. POSTULATY SZCZEGÓLNEJ TEORII WZGLĘDNOŚCI

A. Synchronizacja zegarów za pomocą sygnałów świetlnych



Rozważmy jeden ustalony i.u.o. i dwa zegary spoczywające względem tego układu, znajdujące się w punktach A i B. W oparciu o jednorodność i izotropowość pustej przestrzeni postulujemy, że wartość c prędkości rozchodzenia się sygnałów świetlnych (fotonów) jest w każdym punkcie przestrzeni taka sama i nie zależy również od kierunku, w którym porusza się sygnał. W szczególności nie zależy od tego, czy sygnał porusza się od zegara A w stronę zegara B, czy też w kierunku przeciwnym.

W chwili t_A^w (odczytanej na zegarze znajdującym się w punkcie A) wysyłamy z punktu A sygnał świetlny, sygnał ten po dotarciu do punktu B jest natychmiast odbijany i powraca do punktu A w chwili t_A^p (odczytanej również na zegarze w punkcie A); rejestrując chwile t_A^w i t_A^p możemy zmierzyć wartość c:

$$c = \frac{2l}{t_A^p - t_A^w}, \tag{4.1}$$

gdzie l jest odległością punktów A i B.

Za pomocą sygnału świetlnego możemy teraz zsynchronizować zegar B z zegarem A. Dla sygnału wysłanego z zegara A w chwili t_A^w, ustawiamy zegar B tak, by w chwili odbicia sygnału wskazywał on czas

$$t_B = t_A^w + \frac{l}{c}. \tag{4.2}$$

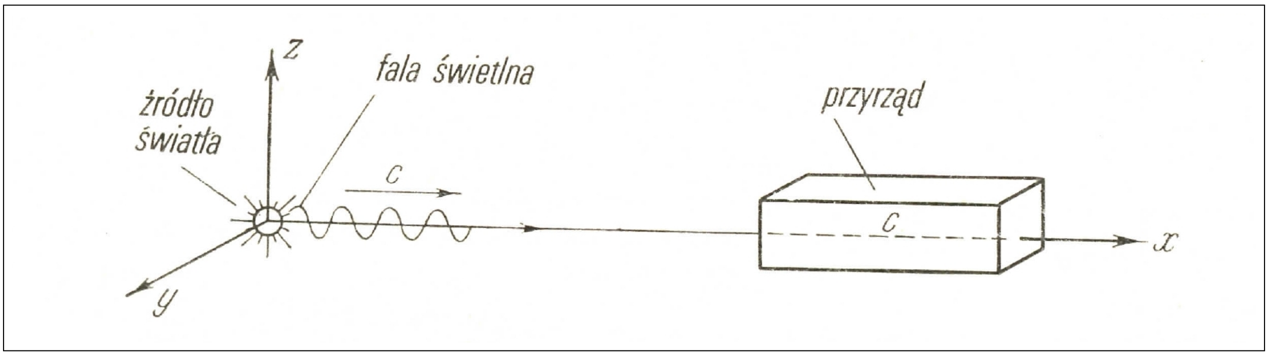
Zgodnie z (4.1), sygnał powraca do zegara A w chwili

$$t_A^p = t_A^w + \frac{2l}{c}. \tag{4.3}$$

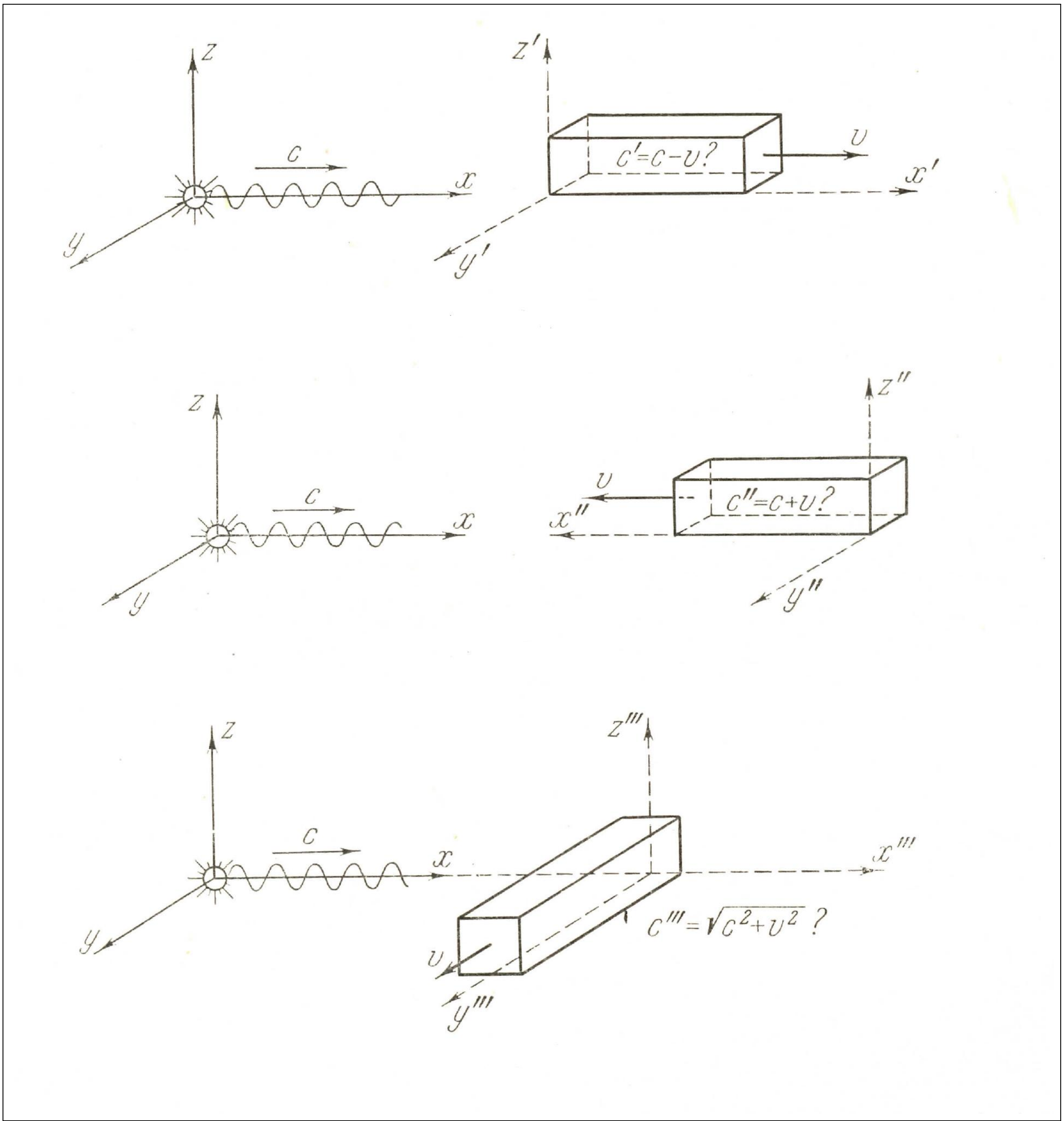
Dwa dowolne zegary spoczywające względem siebie w punktach A i B są zatem zsynchronizowane, jeśli dla sygnału wysłanego w dowolnej chwili t_A^w spełnione jest równanie, będące konsekwencją równań (4.2) i (4.3):

$$t_B - t_A^w = t_A^p - t_B \implies t_B = \frac{1}{2}(t_A^w + t_A^p). \tag{4.4}$$

B. Prędkość światła i prawo dodawania prędkości



Na przełomie XIX i XX wieku fizykom wydawało się, że istnieje wyróżniony układ odniesienia, względem którego prędkość rozchodzenia się światła ma wartość $c \cong 300\,000$ km/s wynikającą z równań Maxwella; układ ten był nazywany układem *eteru*. Przez eter rozumiano także hipotetyczny ośrodek, w którym miałyby się rozchodzić fale elektromagnetyczne.



Jeżeli u.o., w którym spoczywa źródło światła, byłby układem eteru, to nierelatywistyczne prawo dodawania prędkości przewiduje, że prędkości c', c'' i c''' powinny być różne od c. Eksperymenty pokazują jednak, że $c' = c'' = c''' = c$. Pierwsze doświadczenie, w którym sprawdzono brak wpływu prędkości układu odniesienia względem hipotetycznego eteru na mierzoną w tym układzie wartość prędkości światła, przeprowadził A. A. Michelson w 1881, zostało ono powtórzone z większą dokładnością przez A. A. Michelsona i E. W. Morleya w 1887. Doświadczenia te pokazują, że koncepcja eteru jest zbędna.

C. Postulaty szczególnej teorii względności

Szczególną teorię względności można oprzeć na dwóch postulatach:

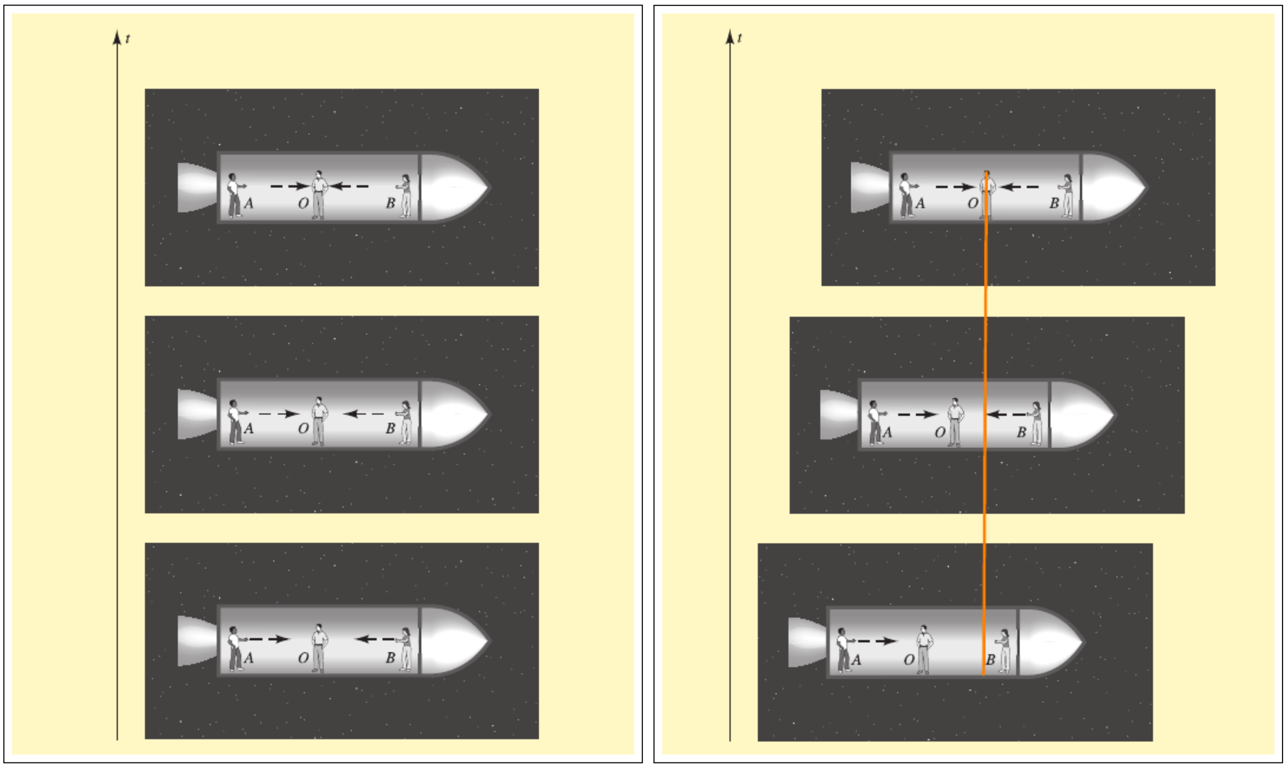
1. zasada względności;

2. zasada niezmienniczości prędkości światła — we wszystkich i.u.o. wartość liczbowa prędkości światła w próżni jest jednakowa i równa

$$c = 299\,792{,}458\ \mathrm{km/s} \quad \text{(dokładnie)}, \tag{4.5}$$

niezależnie od ruchu źródła światła względem obserwatora, który spoczywa w i.u.o.

D. Względność jednoczesności/równoczesności zdarzeń



Lewy rysunek: przebieg zdarzeń w i.u.o., w którym rakieta spoczywa. Rysunek prawy: przebieg zdarzeń w i.u.o., względem którego rakieta się porusza.

Trzej obserwatorzy A, B i O lecą rakietą, spoczywając względem niej; O znajduje się w połowie odległości między A i B. A i B wysyłają sygnały świetlne skierowane do O, **który odbiera je równocześnie**.

Obserwator w spoczynku względem rakiety: *A i B znajdują się w jednakowej odległości od O, wobec tego światło potrzebuje tyle samo czasu, by pokonać drogę z A do O, jak z B do O: skoro sygnały dotarły do O równocześnie, to* ***musiały zostać wysłane równocześnie****.*

Obserwator w spoczynku w układzie, względem którego rakieta się porusza: *sygnały dotarły do O równocześnie; wcześniej, gdy sygnały były jeszcze w ruchu, B znajdował się bliżej niż A miejsca, w którym znalazł się O w chwili rejestracji sygnałów: ponieważ oba sygnały rozchodzą się z prędkością światła c, to* ***sygnał z A musiał zostać wysłany wcześniej niż z B****, gdyż miał do pokonania dłuższą drogę, a dotarł do O w tym samym momencie co sygnał wysłany z B.*

Powyższe rozumowanie dowodzi, że **pojęcie równoczesności/jednoczesności jest względne**: w różnych i.u.o. odstęp czasowy pomiędzy tymi samymi zdarzeniami jest na ogół różny.

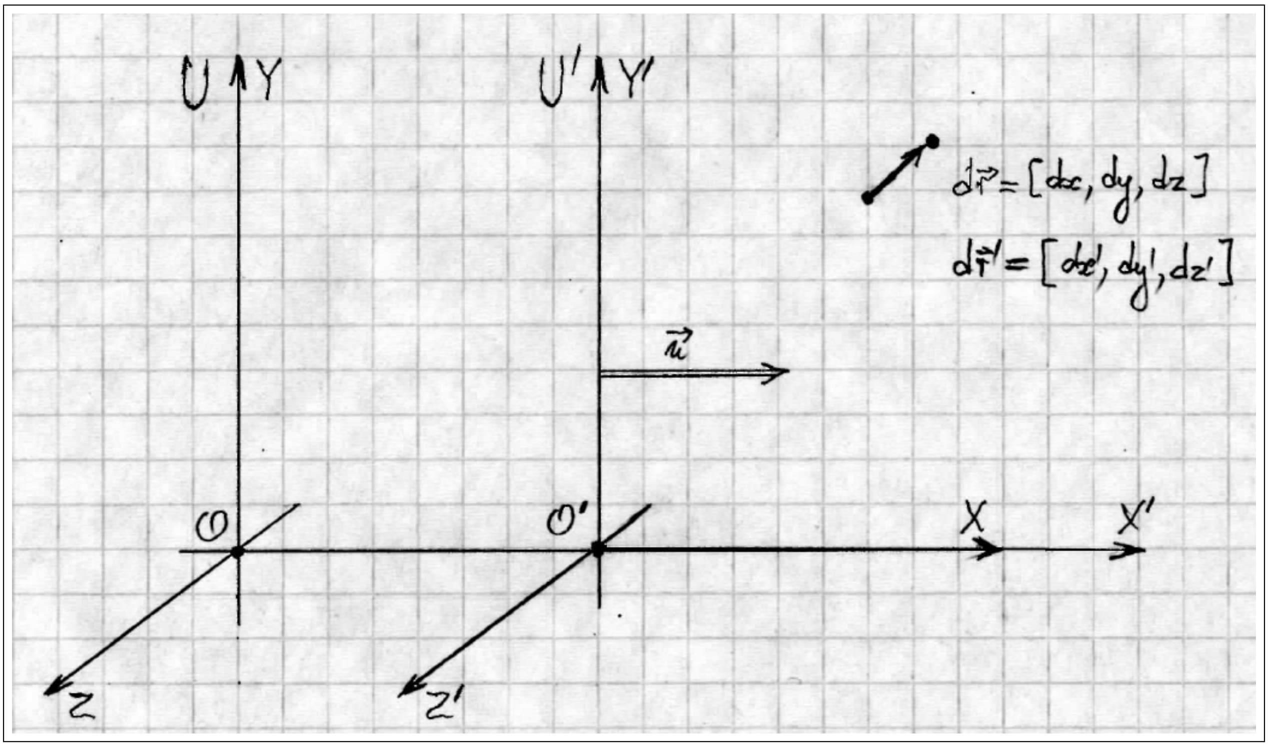
Jak zmierzyć długość pręta poruszającego się względem u.o., nie zatrzymując go? Długość pręta poruszającego się np. wzdłuż ustalonej osi układu współrzędnych, określamy jako różnicę współrzędnych jego początku i końca, **zmierzonych jednocześnie** — można przypuszczać, że z powodu względności jednoczesności długość tego samego pręta jest różna w różnych układach odniesienia.

V. PRZEKSZTAŁCENIE (TRANSFORMACJA) LORENTZA

Pusta przestrzeń jest jednorodna i izotropowa, czas jest jednorodny, dlatego przekształcenia wiążące współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch różnych i.u.o. powinny być funkcjami liniowymi:

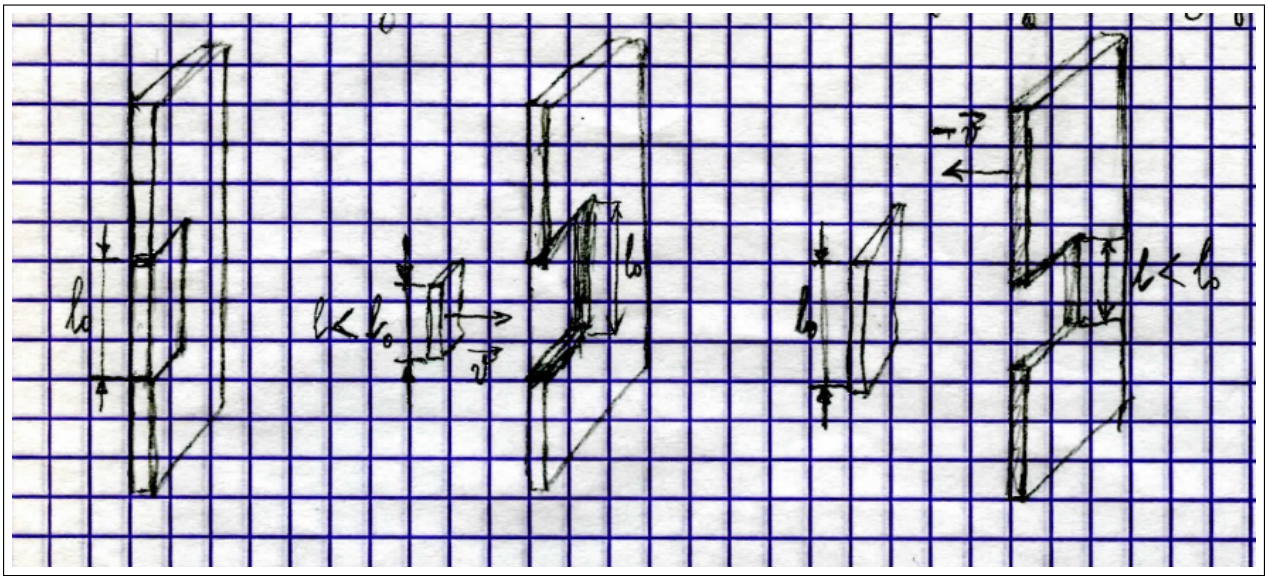
$$\begin{cases} t' = f_1(t,x,y,z) = m_{11}\,t + m_{12}\,x + m_{13}\,y + m_{14}\,z + m_{15}, \\ x' = f_2(t,x,y,z) = m_{21}\,t + m_{22}\,x + m_{23}\,y + m_{24}\,z + m_{25}, \\ y' = f_3(t,x,y,z) = m_{31}\,t + m_{32}\,x + m_{33}\,y + m_{34}\,z + m_{35}, \\ z' = f_4(t,x,y,z) = m_{41}\,t + m_{42}\,x + m_{43}\,y + m_{44}\,z + m_{45}, \end{cases} \tag{5.1}$$

gdzie współczynniki m_{ij} mogą zależeć wyłącznie od prędkości względnej obu układów.



Zakładamy, że w chwili $t = t' = 0$ osie obu układów współrzędnych pokrywają się oraz że układ U' porusza się względem układu U ruchem postępowym prostoliniowym ze stałą prędkością $\vec{u}$ równoległą do osi x.

Posługując się zasadą względności można wykazać, że wymiary ciał poprzeczne w stosunku do kierunku ruch względnego dwóch i.u.o., nie zmieniają się przy przechodzeniu od jednego do drugiego i.u.o. Wykazuje to eksperyment myślowy zilustrowany poniżej.



Ostatecznie szukane przekształcenie ma postać:

$$t' = Mx + Nt, \tag{5.2a}$$

$$x' = Ax + Bt, \tag{5.2b}$$

$$y' = y, \quad z' = z, \tag{5.2c}$$

gdzie współczynniki A, B, M, N mogą zależeć tylko od prędkości względnej $\vec{u}$ układów.

- Rozważmy ruch punktu materialnego, który względem układu U w czasie $\mathrm{d}t$ przemieścił się o wektor $[\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z]_U$, ten sam punkt materialny względem układu U' przemieścił się w czasie $\mathrm{d}t'$ o wektor $[\mathrm{d}x', \mathrm{d}y', \mathrm{d}z']_{U'}$,

$$\mathrm{d}t' = M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}x' = A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z' = \mathrm{d}z. \tag{5.3}$$

  stąd

$$v'_{x'} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{A\mathrm{d}x + B\mathrm{d}t}{M\mathrm{d}x + N\mathrm{d}t} = \frac{A\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + B}{M\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + N} = \frac{Av_x + B}{Mv_x + N}. \tag{5.4a}$$

  Podobnie

$$v'_{y'} = \frac{v_y}{Mv_x + N}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{Mv_x + N}. \tag{5.4b}$$

- Niech punkt materialny spoczywa względem układu U', wówczas $v'_{x'} = v'_{y'} = v'_{z'} = 0$ oraz $v_x = u$ (i $v_y = v_z = 0$), stąd

$$0 = \frac{Au + B}{Mu + N} \implies B = -Au. \tag{5.5}$$

- Rozważmy teraz punkt materialny spoczywający względem układu U, wówczas $v_x = v_y = v_z = 0$ oraz $v'_{x'} = -u$ (i $v'_{y'} = v'_{z'} = 0$), stąd

$$-u = \frac{B}{N} \implies N = -\frac{B}{u} = A. \tag{5.6}$$

- Podstawiamy (5.5) i (5.6) do równań (5.4):

$$v'_{x'} = \frac{A(v_x - u)}{Mv_x + A}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y}{Mv_x + A}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z}{Mv_x + A}. \tag{5.7}$$

- Rozważmy sygnał świetlny (foton) poruszający się w dowolnym kierunku względem układu U', wówczas na ogół żadna ze współrzędnych wektora prędkości $\vec{v}\,'$ nie będzie równa zeru, ale

$$|\vec{v}\,'| = \sqrt{(v'_{x'})^2 + (v'_{y'})^2 + (v'_{z'})^2} = c. \tag{5.8}$$

Korzystając z (5.7) i (5.8) obliczamy:

$$c^2 = (v'_{x'})^2 + (v'_{y'})^2 + (v'_{z'})^2 = \frac{A^2(v_x - u)^2 + v_y^2 + v_z^2}{(Mv_x + A)^2}. \tag{5.9}$$

Ponieważ $c^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, stąd $v_y^2 + v_z^2 = c^2 - v_x^2$, co podstawiany do równania powyżej. Po przekształceniach dostajemy:

$$(c^2M^2 - A^2 + 1)\, v_x^2 + 2(c^2M + Au)A\, v_x + A^2(c^2 - u^2) - c^2 = 0. \tag{5.10}$$

Równanie (5.10) musi być spełnione dla *każdej* wartości v_x z przedziału $-c \leqslant v_x \leqslant c$. Jest to możliwe tylko wtedy, gdy

$$c^2M^2 - A^2 + 1 = 0, \tag{5.11a}$$

$$2(c^2M + Au)A = 0, \tag{5.11b}$$

$$A^2(c^2 - u^2) - c^2 = 0. \tag{5.11c}$$

Układ równań (5.11) rozwiązujemy ze względu na A i M:

$$A = \varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad M = -\frac{u}{c^2}A = -\varepsilon \frac{u}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad \text{gdzie} \quad \varepsilon = \pm 1. \tag{5.12}$$

- Należy wybrać znak $+$ (czyli $\varepsilon = +1$), bo gdy $u = 0$ musi być $v'_{x'} = v_x$, $v'_{y'} = v_y$, $v'_{z'} = v_z$.

Ostatecznie współczynniki A, B, M i N mają postać:

$$A = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.13a}$$

$$B = -\frac{u}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.13b}$$

$$M = -\frac{u}{c^2}\frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \tag{5.13c}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}. \tag{5.13d}$$

Podstawiając (5.13) do równań (5.7), relatywistyczne prawo dodawania prędkości przybiera postać:

$$\boxed{v'_{x'} = \frac{v_x - u}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_{y'} = \frac{v_y\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_{z'} = \frac{v_z\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 - \dfrac{uv_x}{c^2}}.} \tag{5.14}$$

Z zasady względności wynika, że wzory wyrażające współrzędne wektora prędkości względem U przez współrzędne wektora prędkości względem U' otrzymamy z powyższych wzorów zastępując u przez $-u$ oraz zamieniając równocześnie wielkości primowane na nieprimowane i na odwrót:

$$\boxed{v_x = \frac{v'_{x'} + u}{1 + \dfrac{uv'_{x'}}{c^2}}, \quad v_y = \frac{v'_{y'}\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{uv'_{x'}}{c^2}}, \quad v_z = \frac{v'_{z'}\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}{1 + \dfrac{uv'_{x'}}{c^2}}.} \tag{5.15}$$

Oczywiście wzory (5.15) można również otrzymać rozwiązując układ równań (5.14) ze względu na v_x, v_y i v_z.

Podstawiając (5.13) do równań (5.2), otrzymujemy ostateczną postać przekształcenia łączącego w współrzędne czasoprzestrzenne w dwóch różnych i.u.o.:

$$\boxed{t' = \frac{t - \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z.} \tag{5.16}$$

Przekształcenie to nazywamy *przeksztaceniem* (lub *transformacją*) *Lorentza*.

Odwołując się ponownie do zasady względności możemy zauważyć, ze przekształcenie *odwrotne* do (5.16) otrzymamy zastępując u przez $-u$ oraz zamieniając równocześnie wielkości primowane na nieprimowane i na odwrót:

$$\boxed{t = \frac{t' + \dfrac{ux}{c^2}}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1 - \dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z'.} \tag{5.17}$$

Wzory te również nazywamy *przeksztaceniem* (lub *transformacją*) *Lorentza*.

Przekształcenie Lorentza i relatywistyczne prawo dodawania prędkości zapewniają, że jeżeli ciało porusza się jednostajnie i prostoliniowo względem pewnego i.u.o., to porusza się ono również jednostajnie i prostoliniowo względem każdego innego i.u.o.