

WSTĘP DO TEORII PROCESÓW STOCHASTYCZNYCH

I. WSTĘP

Wynikami niektórych eksperymentów losowych są funkcje, których argument należy do pewnego podzbioru zbioru liczb rzeczywistych \mathbb{R} . Przy powtarzaniu eksperymentu obserwujemy za każdym razem inną funkcję. Stworzenie modelu probabilistycznego eksperymentów, których wynikami są losowo zmieniające się funkcje, wymaga wprowadzenia pojęcia procesu stochastycznego (nazywanego również procesem losowym).

Teoria procesów stochastycznych zajmuje się modelowaniem zjawisk losowych występujących m.in. w

- fizyce: rozpad promieniotwórczy, dyfuzja, ruchy Browna, turbulentny przepływ cieczy;
- medycynie: badanie sygnałów biomedycznych, takich jak elektrokardiogramy (EKG) lub elektroencefalogramy (EEG);
- ekonomii: zmiany cen akcji na giełdzie i liczby roszczeń wobec towarzystw ubezpieczeniowych;
- meteorologii: prognozowanie pogody, w szczególności badanie zmian w czasie ciśnienia atmosferycznego i temperatury powietrza w ustalonym miejscu na powierzchni Ziemi;
- analizie sygnałów: opis szumów (zakłóceń), wykrywanie słabych sygnałów w szumie.

Podstawowym praktycznym zadaniem teorii procesów stochastycznych jest *przewidywanie* zachowania procesu dla chwil $t > t_0$, jeśli znany jest jego przebieg dla $t \leq t_0$.

II. POJĘCIE PROCESU STOCHASTYCZNEGO

Niech $T \subset \mathbb{R}$, dowolny element $t \in T$ nazywać będziemy chwilą.

Procesem stochastycznym (lub *procesem losowym*) nazywamy funkcję $T \ni t \mapsto X_t$, gdzie X_t jest zmienną losową określoną na ustalonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) .

Proces stochastyczny będziemy oznaczać przez $\{X_t : t \in T\}$ lub $(X_t)_{t \in T}$.

Wartością procesu w chwili t nazywamy zmienną losową X_t .

Realizacją (trajekcją) *procesu* nazywamy funkcję rzeczywistą $T \ni t \mapsto x_\omega(t) := X_t(\omega)$, przy ustalonym $\omega \in \Omega$ (często pisze się $x(t)$ zamiast $x_\omega(t)$).

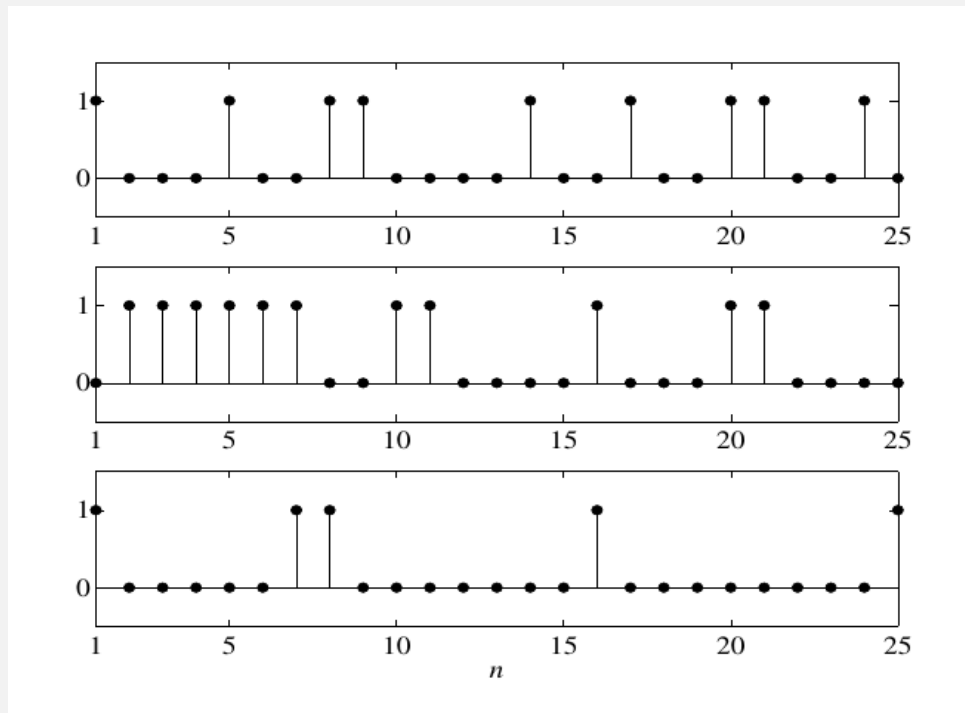
Przestrzenią stanów procesu nazywamy zbiór liczb $\{X_t(\omega) : \omega \in \Omega, t \in T\} \subset \mathbb{R}$.

Jeżeli T jest przedziałem (ograniczonym bądź nie), to proces stochastyczny nazywamy *procesem z czasem ciągłym*. Jeżeli T jest zbiorem przeliczalnym, $T = \{t_1, t_2, \dots\}$, to proces stochastyczny nazywamy *procesem z czasem dyskretnym* lub *szeregiem czasowym*, bądź *ciągami losowym*. Jeśli pierwszą — czyli liczbowo najmniejszą — chwilę czasu oznaczymy przez t_0 , wtedy $T = \{t_0, t_1, t_2, \dots\}$. Często pomija się informację o używanej jednostce czasu, wówczas zbiór T jest zazwyczaj podzbiorem zbioru wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$, np. $T = \{1, 2, \dots\} = \mathbb{N}$, $T = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$, lub $T = \mathbb{Z}$.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ czasami oznacza się krótko przez $x(t)$ (czyli stosuje się tę samą notację dla procesu stochastycznego i jego realizacji). My będziemy często skracać zapis $(X_t)_{t \in T}$ do (X_t) .

Przykład 2.1. Dyskretny biały szum.

Jest to szereg czasowy $(X_n)_{n=1}^\infty$ złożony z niezależnych zmiennych losowych X_n , z których każda ma zerową wartość średnią i tę samą wariancję równą σ^2 . Proces ten może opisywać zakłócenia (czyli szum), nakładające się na sygnał podczas jego transmisji. Szereg czasowy $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ ($n \geq 1$) można wykorzystać do opisu kumulowania się błędów pomiarów lub błędów obliczeń numerycznych.

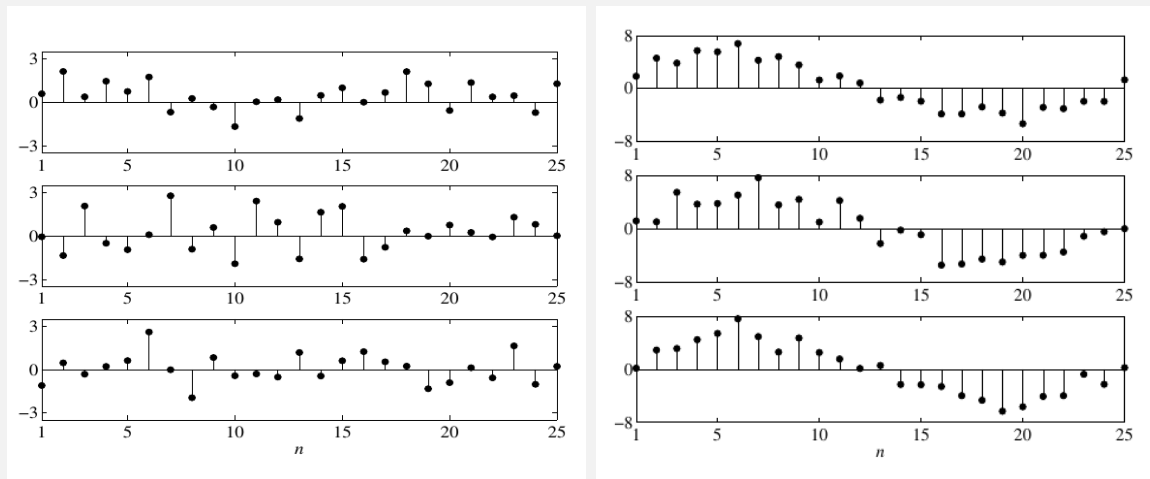


Rysunek 1: Trzy realizacje szeregu czasowego (X_n) , $n = 1, 2, \dots, 25$, w którym zmienne losowe X_n są niezależne i każda z nich ma rozkład zerojedynkowy $b(1, p)$ (czyli przyjmuje wartości 0 i 1 z prawdopodobieństwami odpowiednio $1 - p$ i p).

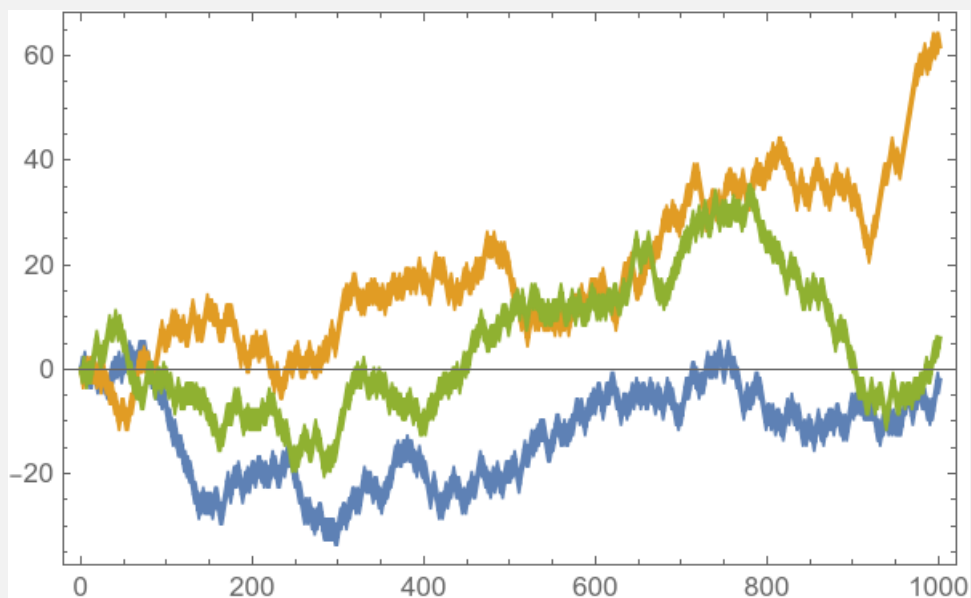
Przestrzenią stanów tego procesu jest zbiór $\{0, 1\}$.

Przykład 2.2. Błądzenie przypadkowe.

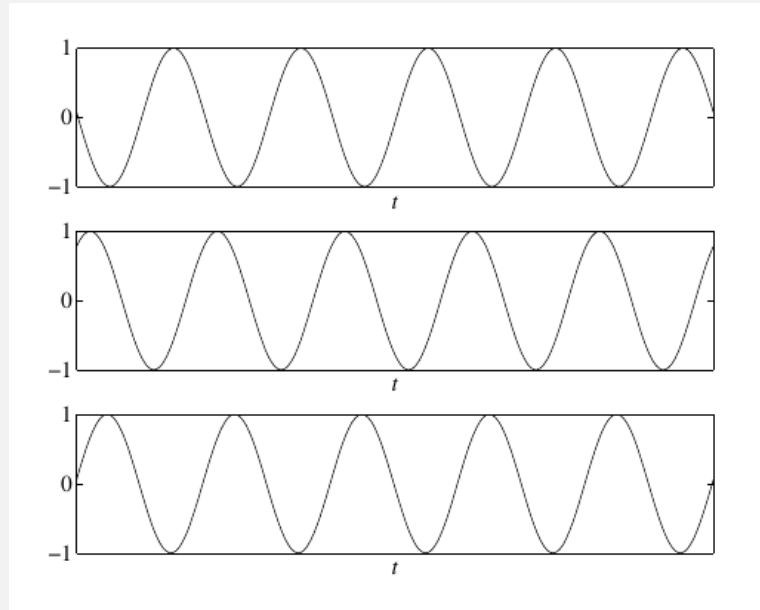
Ustalmy $0 < p < 1$; cząstka startuje z zera na osi liczb rzeczywistych i zmienia losowo swoją pozycję o jednostkę w prawo (czyli w kierunku zgodnym ze zwrotem osi) z prawdopodobieństwem p albo o jednostkę w lewo z prawdopodobieństwem $1 - p$, w każdej chwili $t = 0, 1, 2, \dots$ niezależnie od poprzednich położań. Błądzeniem przypadkowym nazywamy szereg czasowy $(X_t)_{t=0}^{\infty}$, gdzie X_t oznacza położenie cząstki w chwili t .



Rysunek 2: **Lewy**: trzy realizacje szeregu czasowego (X_n) , $n = 1, 2, \dots, 25$, w którym zmienne losowe X_n są niezależne i każda z nich ma rozkład normalny $N(0,1)$; takie szeregi czasowe są realizacjami dyskretnego szumu białego. Przestrzenią stanów tego procesu jest \mathbb{R} . **Prawy**: trzy realizacje procesu opisanego wzorem $5 \sin(2\pi fn) + X_n$, $f = 1/25$, gdzie X_n są zmiennymi losowymi wziętymi z lewego rysunku.



Rysunek 3: Trzy realizacje błędzenia przypadkowego dla prawdopodobieństwa $p = 0,5$ i chwil czasu $t = 0, 1, \dots, 1000$. Przestrzenią stanów tego procesu jest \mathbb{Z} .



Rysunek 4: W komunikacji realizowanej za pomocą fal radiowych sygnał nośny często jest modelowany jako sinusoida z losową fazą. Powodem stosowania losowej fazy jest to, że odbiornik nie zna chwili czasu, w którym nadajnik został włączony, ani odległości od nadajnika do odbiornika. Modelem matematycznym stosowanym w takiej sytuacji jest proces stochastyczny z czasem ciągłym opisany wzorem $X_t := \cos(2\pi ft + \Theta)$, gdzie f jest częstotliwością nośną, natomiast faza Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi \rangle$; przestrzenią stanów tego procesu jest przedział $\langle -1; +1 \rangle$. Rysunek przedstawia trzy realizacje procesu (X_t) .

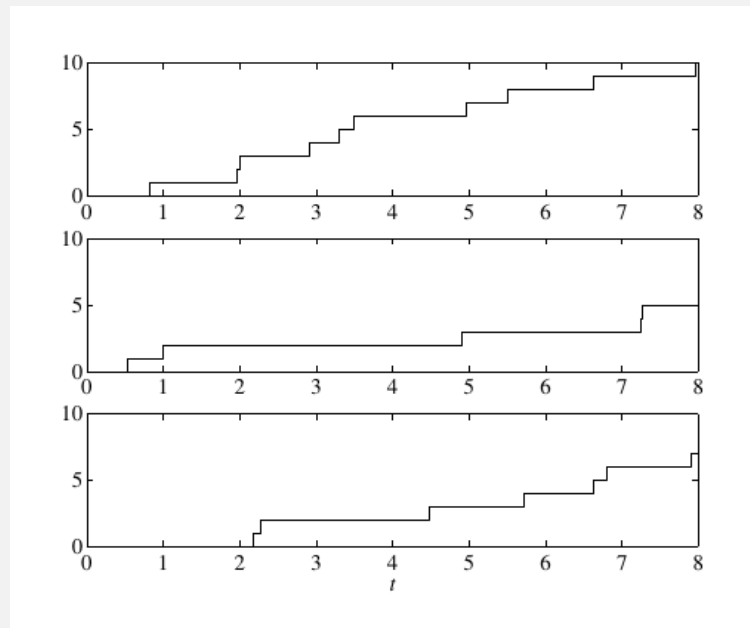
III. OPIS PROBABILISTYCZNY PROCESU STOCHASTYCZNEGO

Skończeniowymiarową dystrybuantą procesu stochastycznego $(X_t)_{t \in T}$ nazywamy dystrybuantę F_{t_1, \dots, t_n} wektora losowego $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną, zaś $t_1, \dots, t_n \in T$ są dowolnie wybranymi chwilami.

Wyróżnimy dwa rodzaje procesów stochastycznych:

1. procesy o skończonej lub przeliczalnej przestrzeni stanów, do ich opisu można używać skończeniowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa postaci

$$p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = P\left(\left\{\omega \in \Omega : X_{t_1}(\omega) = x_1, \dots, X_{t_n}(\omega) = x_n\right\}\right); \quad (3.1)$$



Rysunek 5: W procesie zliczania (N_t) , $t \geq 0$, N_t zlicza liczbę wystąpień pewnej wielkości, które miały miejsce do czasu t (w tym każde zdarzenie mające miejsce dokładnie w czasie t). Możemy zliczać liczbę odsłon strony internetowej do czasu t , liczbę radioaktywnych cząstek wyemitowanych przez próbkę uranu (i rejestrowanych przez licznik Geigera-Müllera), liczbę pakietów docierających do routera internetowego, liczbę fotonów rejestrowanych przez teleskop, itd. Przestrzenią stanów tego procesu jest $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Na rysunku pokazano trzy realizacje pewnego procesu zliczania. Chwile, w których wykres „przeskakuje”, to chwile, w których coś jest liczone.

2. procesy, których wszystkie dystrybuanty skończeniowymiarowe są typu ciągłego, do ich opisu używa się rodziny łącznych gęstości prawdopodobieństwa $p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ dowolnych wektorów losowych $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$; przypomnijmy, że wówczas

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} d\xi_1 \cdots \int_{-\infty}^{x_n} d\xi_n p_{t_1, \dots, t_n}(\xi_1, \dots, \xi_n). \quad (3.2)$$

Dalej będziemy opisywać probabilistyczne własności procesów stochastycznych posługując się łącznymi gęstościami prawdopodobieństwa $p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$.

Łączne gęstości prawdopodobieństwa $p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$ spełniają warunki unormowania i

zgodności:

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^n} p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1, \quad (3.3)$$

$$\int \cdots \int_{\mathbb{R}^{n-k}} p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) dx_{k+1} \cdots dx_n = p_{t_1, \dots, t_k}(x_1, \dots, x_k). \quad (3.4)$$

Odtąd będziemy zazwyczaj opuszczać indeksy czasowe, np. w formule definiującej warunkową gęstość prawdopodobieństwa napiszemy

$$p(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) := \frac{p(x_1, \dots, x_n)}{p(x_{k+1}, \dots, x_n)}. \quad (3.5)$$

Powiemy, że wektor losowy $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$ jest *niezależny* od wektora losowego $(X_{t_{k+1}}, \dots, X_{t_n})$, jeżeli

$$p(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_k)p(x_{k+1}, \dots, x_n). \quad (3.6)$$

Wówczas $p(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_k)$.

Dwa procesy stochastyczne $(X_t)_{t \in T}$ i $(Y_{t'})_{t' \in T'}$ są *niezależne*, jeżeli dla każdych liczb naturalnych m, n oraz każdego wyboru chwil t_i ($i = 1, \dots, m$) i $t_{j'}$ ($j = 1, \dots, n$) zachodzi

$$p(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = p(x_1, \dots, x_m)p(y_1, \dots, y_n). \quad (3.7)$$

Wartość oczekiwana (średnia) m_X procesu stochastycznego (X_t) :

$$m_X(t) := E(X_t). \quad (3.8)$$

Funkcja autokorelacji K_X procesu stochastycznego (X_t) :

$$K_X(t_1, t_2) := E(X_{t_1}X_{t_2}). \quad (3.9)$$

Ponieważ $X_{t_2}X_{t_1} = X_{t_1}X_{t_2}$,

$$K_X(t_2, t_1) = K_X(t_1, t_2). \quad (3.10)$$

Wariancja V_X i odchylenie standardowe σ_X procesu stochastycznego (X_t) :

$$V_X(t) := E((X_t - m_X(t))^2), \quad V_X(t) \geq 0, \quad (3.11a)$$

$$\sigma_X(t) := +\sqrt{V_X(t)}, \quad \sigma_X(t) \geq 0. \quad (3.11b)$$

Można pokazać, że

$$V_X(t) = E(X_t^2) - m_X^2(t) = K_X(t, t) - m_X^2(t). \quad (3.12)$$

Funkcja autokowariancji C_X procesu stochastycznego (X_t) :

$$C_X(t_1, t_2) := E\left(\left(X_{t_1} - m_X(t_1)\right)\left(X_{t_2} - m_X(t_2)\right)\right). \quad (3.13)$$

Zachodzą wzory:

$$C_X(t_2, t_1) = C_X(t_1, t_2), \quad (3.14a)$$

$$C_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2). \quad (3.14b)$$

Współczynnik korelacji ρ_X procesu stochastycznego (X_t) :

$$\rho_X(t_1, t_2) := \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)}. \quad (3.15)$$

Własności współczynnika korelacji ρ_X :

$$\rho_X(t_2, t_1) = \rho_X(t_1, t_2), \quad (3.16a)$$

$$-1 \leq \rho_X(t_1, t_2) \leq +1. \quad (3.16b)$$

Jeżeli proces stochastyczny (X_t) ma skończeniowymiarowe dystrybuanty typu ciągłego, to, na przykład,

$$m_X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x p_t(x), \quad (3.17a)$$

$$K_X(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 x_1 x_2 p_{t_1, t_2}(x_1, x_2). \quad (3.17b)$$

IV. STACJONARNE PROCESY STOCHASTYCZNE

Proces stochastyczny nazywamy *ściśle stacjonarnym* (lub *stacjonarnym w węższym sensie*), jeśli jego własności nie zależą od wyboru początku liczenia czasu. Dokładniej: proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ jest ściśle stacjonarny, jeśli warunek

$$F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1 - \tau, \dots, t_n - \tau}(x_1, \dots, x_n) \quad (4.1)$$

zachodzi dla dowolnego $n \in \mathbb{N}$, dowolnego wyboru chwil czasu $t_1, \dots, t_n \in T$ i dowolnego $\tau \in \mathbb{R}$ takiego, że chwile $t_1 - \tau, \dots, t_n - \tau \in T$.

Proces, który nie jest ściśle stacjonarny, nazywamy *niestacjonarnym*.

Dla $n = 1$ warunek (4.1) sprowadza się do równości

$$F_t(x) = F_{t-\tau}(x) \quad \text{dla wszystkich } t \in T \text{ i } \tau \in \mathbb{R} \text{ takich, że } t - \tau \in \mathbb{R}, \quad (4.2)$$

zatem $F_t(x)$ nie zależy od t (i możemy pisać $F(x)$, czyli pomijamy indeks t). Jeżeli istnieje gęstość prawdopodobieństwa $p_t(x) = dF_t(x)/dx$, wówczas $p_t(x) = p_{t-\tau}(x)$, czyli $p_t(x)$ nie zależy od t (i możemy pisać $p(x)$).

Niech (X_t) będzie ściśle stacjonarnym procesem stochastycznym. Wówczas $K_X(t, t - \tau)$ nie zależy od wyboru chwili t .

DOWÓD.

$$K_X(t', t' - \tau) = E(X_{t'} X_{t' - \tau}) \quad (4.3a)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 x_1 x_2 p_{t', t' - \tau}(x_1, x_2) \quad (4.3b)$$

(przesuwamy t' i $t' - \tau$ o $t' - t$: $t' \mapsto t' - (t' - t) = t$, $t' - \tau \mapsto t' - \tau - (t' - t) = t - \tau$)

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} dx_1 dx_2 x_1 x_2 p_{t, t - \tau}(x_1, x_2) \quad (4.3c)$$

$$= E(X_t X_{t - \tau}) = K_X(t, t - \tau). \quad (4.3d)$$

Można zdefiniować nową funkcję autokorelacji R_X będącą funkcją tylko jednej zmiennej:

$$R_X(\tau) := K_X(t, t - \tau). \quad (4.4)$$

Zachodzi związek:

$$K_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_1 - (t_1 - t_2)) = R_X(t_1 - t_2). \quad (4.5)$$

Funkcja $R_X(\tau)$ jest funkcją parzystą,

$$R_X(-\tau) = R_X(\tau), \quad (4.6)$$

bo

$$R_X(-\tau) = E(X_t X_{t+\tau}) = E(X_{t+\tau} X_t) = E(X_{(t+\tau)-\tau} X_{t-\tau}) = E(X_t X_{t-\tau}) = R_X(\tau). \quad (4.7)$$

Wartość oczekiwana, wariancja i odchylenie standardowe ściśle stacjonarnego procesu stochastycznego są stałe:

$$m_X(t) = E(X_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x p_t(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x p(x) dx = \text{const}, \quad (4.8a)$$

$$V_X(t) = K_X(t, t) - m_X^2(t) = R_X(0) - m_X^2 = \text{const}, \quad (4.8b)$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)} = \sqrt{R_X(0) - m_X^2} = \text{const}. \quad (4.8c)$$

Funkcja autokowariancji $C_X(t_1, t_2)$ i współczynnik korelacji $\rho_X(t_1, t_2)$ ściśle stacjonarnego procesu stochastycznego zależą tylko od $t_1 - t_2$.

Przykład 4.1. Rozważmy proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ określony następująco:

$$X_t := Y \text{ dla każdego } t \in T, \quad (4.9)$$

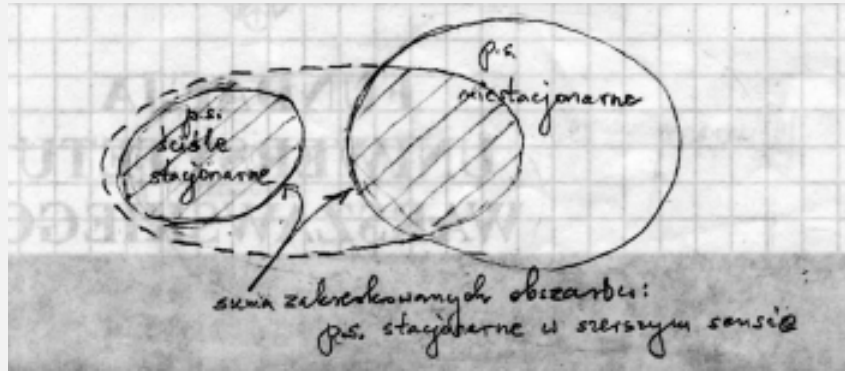
gdzie Y jest dowolną ustaloną zmienną losową. Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ jest ściśle stacjonarny.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ jest *stacjonarny w szerszym sensie*, jeśli ma on stałą wartość oczekiwaną, $m_X(t) = \text{const}$, a jego funkcję autokorelacji da się przedstawić w postaci $K_X(t_1, t_2) = R_X(t_1 - t_2)$, gdzie R_X jest parzystą funkcją rzeczywistą jednej zmiennej.

Wariancja i odchylenie standardowe procesu stochastycznego stacjonarnego w szerszym sensie są stałe:

$$V_X(t) = K_X(t, t) - m_X^2(t) = R_X(0) - m_X^2 = \text{const}, \quad (4.10a)$$

$$\sigma_X(t) = \sqrt{V_X(t)} = \sqrt{R_X(0) - m_X^2} = \text{const}, \quad (4.10b)$$



Rysunek 6: Procesy stochastyczne niestacjonarne, stacjonarne w węższym sensie, stacjonarne w szerszym sensie.

będziemy zatem pisać V_X zamiast $V_X(t)$ oraz σ_X zamiast $\sigma_X(t)$. Funkcja autokowariancji $C_X(t_1, t_2)$ i współczynnik korelacji $\rho_X(t_1, t_2)$ procesu stochastycznego stacjonarnego w szerszym sensie zależą natomiast tylko od różnicy $t_1 - t_2$:

$$C_X(t_1, t_2) = K_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2) = R_X(t_1 - t_2) - m_X^2, \quad (4.11a)$$

$$\rho_X(t_1, t_2) = \frac{C_X(t_1, t_2)}{\sigma_X(t_1)\sigma_X(t_2)} = \frac{R_X(t_1 - t_2) - m_X^2}{\sigma_X^2}. \quad (4.11b)$$

Przykład 4.2. Rozważmy proces stochastyczny (X_t) z czasem ciągłym:

$$X_t := A \cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (4.12)$$

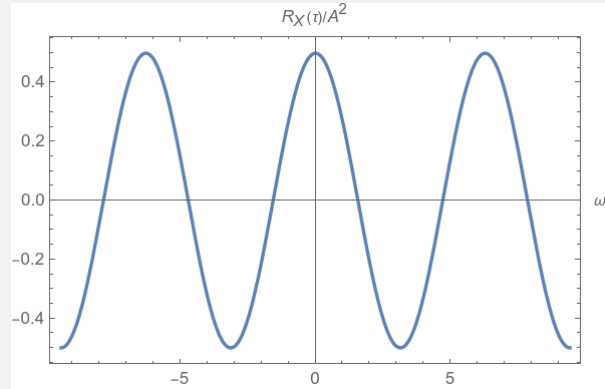
gdzie $A > 0$ i $\omega > 0$ są stałymi, zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi \rangle$. Można pokazać, że

$$m_X(t) = 0, \quad (4.13a)$$

$$K_X(t_1, t_2) = \frac{1}{2} A^2 \cos[\omega(t_1 - t_2)]. \quad (4.13b)$$

Proces stochastyczny (X_t) jest zatem procesem stacjonarnym w szerszym sensie. Możemy wprowadzić funkcję autokorelacji R_X jednej zmiennej:

$$R_X(\tau) = K_X(t, t - \tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega\tau). \quad (4.14)$$



Rysunek 7: Funkcja autokorelacji procesu stochastycznego opisanego w przykładzie 4.2.

Niech $(X_t)_{t \in T}$ będzie ściśle stacjonarnym procesem stochastycznym. Wówczas dla dowolnej funkcji g jednej zmiennej,

$$E(g(X_t)) = E(g(X_{t-\tau})), \quad (4.15)$$

czyli $E(g(X_t))$ nie zależy od t . Również dla dowolnej funkcji h dwóch zmiennych,

$$E(h(X_{t_1}, X_{t_2})) = E(h(X_{t_1-\tau}, X_{t_2-\tau})). \quad (4.16)$$

Wybierając $\tau = t_2$ dostajemy

$$E(h(X_{t_1}, X_{t_2})) = E(h(X_{t_1-t_2}, X_0)), \quad (4.17)$$

czyli $E(h(X_{t_1}, X_{t_2}))$ zależy od t_1, t_2 tylko poprzez różnicę $t_1 - t_2$.

Przykład 4.3. Rozważmy ciąg losowy (X_n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, w którym zmienna losowa X_0 ma rozkład Laplace'a z parametrem $\lambda = \sqrt{2}$ (zmienna losowa o rozkładzie Laplace'a ma gęstość prawdopodobieństwa $f(x) := \frac{\lambda}{2} \exp(-\lambda|x|)$, $-\infty < x < +\infty$), natomiast zmienne losowe X_n dla $n \geq 1$ mają rozkład normalny $N(0, 1)$, wszystkie zmienne losowe X_n są niezależne. Ciąg losowy (X_n) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie i nie jest procesem ściśle stacjonarnym.

Można pokazać, że $E(X_n) = 0$ i $E(X_n^2) = 1$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, natomiast funkcja

autokorelacji $K_X(m, n)$ przyjmuje następujące wartości:

$$\text{dla } m \neq n: \quad K_X(m, n) = E(X_m X_n) = E(X_m)E(X_n) = 0,$$

$$\text{dla } m = n: \quad K_X(m, m) = E(X_m^2) = 1.$$

Możemy zatem napisać:

$$K_X(m, n) = \delta_{m,n} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } m = n, \\ 0, & \text{gdy } m \neq n, \end{cases}$$

gdzie $\delta_{m,n}$ to *symbol (delta) Kroneckera*. Ponieważ $\delta_{m,n} = \delta_{m-n,0}$, możemy napisać $K_X(m, n) = \delta_{m-n,0}$. Zatem (X_n) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie.

Rozważmy wartości oczekiwane $E(X_n^4)$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$. Gdyby (X_n) był procesem stochastycznym ściśle stacjonarnym, $E(X_n^4)$ nie powinno zależeć od n . Mamy jednak: $E(X_0^4) = 4!/\lambda^4 = 6$, natomiast dla $n \geq 1$, $E(X_n^4) = 3$.

Przykład 4.4. Rozważmy proces stochastyczny (Z_t) z czasem ciągłym:

$$Z_t := X_t \cdot Y_t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie X_t , $-\infty < t < +\infty$, jest pewnym procesem stochastycznym stacjonarnym w szerszym sensie, natomiast proces stochastyczny (Y_t) jest opisany wzorem

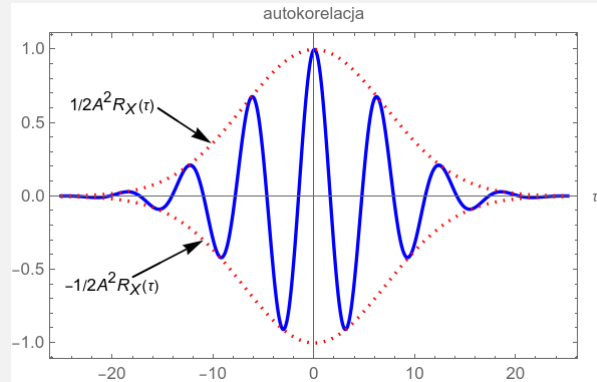
$$Y_t := A \cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie $A > 0$ i $\omega > 0$ są stałymi, zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi \rangle$ [z przykładu 4.2 wiemy, że (Y_t) jest również procesem stochastycznym stacjonarnym w szerszym sensie]. Procesy stochastyczne (X_t) i (Y_t) są niezależne.

Wykażemy, że proces stochastyczny (Z_t) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie. W tym celu obliczamy wartość oczekiwaną $E(Z_t)$ i funkcję autokorelacji $K_Z(t_1, t_2)$ procesu (Z_t) :

$$E(Z_t) = E(X_t Y_t) = E(X_t)E(Y_t) = m_X \cdot 0 = 0;$$

$$K_Z(t_1, t_2) = E(Z_{t_1} Z_{t_2}) = E(X_{t_1} Y_{t_1} \cdot X_{t_2} Y_{t_2}) = E(X_{t_1} X_{t_2} \cdot Y_{t_1} Y_{t_2})$$



Rysunek 8: Przykładowa funkcja autokorelacji (wykreślona kolorem niebieskim) procesu stochastycznego (Z_t) opisanego w przykładzie 4.4. Obwiednią (zaznaczoną kolorem czerwonym) funkcji autokorelacji procesu (Z_t) jest funkcja autokorelacji procesu (X_t) pomnożona przez stałą $\frac{1}{2}A^2$.

$$= E(X_{t_1} X_{t_2}) E(Y_{t_1} Y_{t_2}) = K_X(t_1, t_2) K_Y(t_1, t_2)$$

$$= R_X(t_1 - t_2) R_Y(t_1 - t_2);$$

możemy zatem zdefiniować $R_Z(\tau) := K_Z(t, t - \tau)$, wówczas

$$R_Z(\tau) = R_X(\tau) R_Y(\tau) = \frac{1}{2} A^2 R_X(\tau) \cos(\omega\tau),$$

ponieważ $R_Y(\tau) = \frac{1}{2} A^2 \cos(\omega\tau)$ (zobacz przykład 4.2).

V. NORMALNE PROCESY STOCHASTYCZNE

Rozważmy n -wymiarowy wektor losowy \vec{X} (niżej \top oznacza transpozycję macierzy, tutaj macierzy wierszowej o wymiarze $1 \times n$, czyli \vec{X} jest traktowany jak macierz kolumnowa o wymiarze $n \times 1$):

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_n)^\top = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Mówimy, że wektor losowy \vec{X} ma n -wymiarowy rozkład normalny (*gaussowski, Gaussa*), jeśli jego łączna gęstość prawdopodobieństwa jest postaci (we wzorze poniżej $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, tak że \vec{x} jest traktowany jak macierz kolumnowa o wymiarze $n \times 1$, \cdot oznacza mnożenie macierzowe)

$$p(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det C}} \exp \left[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{m})^\top \cdot C^{-1} \cdot (\vec{x} - \vec{m}) \right], \quad (5.2)$$

gdzie $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)^\top \in \mathbb{R}^n$, natomiast C jest rzeczywistą macierzą $n \times n$ symetryczną i dodatnio określoną. Wszystkie własności n -wymiarowego rozkładu normalnego określone są przez \vec{m} i C .

Macierz rzeczywista C (o wymiarze $n \times n$) jest dodatnio określona, jeśli

$$\vec{x}^\top \cdot C \cdot \vec{x} > 0$$

dla każdego $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $\vec{x} \neq \vec{0} := (0, \dots, 0)^\top$.

Wektor \vec{m} określa wartość oczekiwaną wektora losowego \vec{X} :

$$E(\vec{X}) = \vec{m}, \quad \text{czyli} \quad E(X_i) = m_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.3)$$

natomiast macierz C jest macierzą kowariancji tego wektora losowego:

$$E\left((\vec{X} - \vec{m}) \cdot (\vec{X} - \vec{m})^\top\right) = C, \quad (5.4a)$$

$$\text{czyli} \quad E\left((X_i - m_i)(X_j - m_j)\right) = C_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (5.4b)$$

$$V(X_i) = C_{ii}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.4c)$$

Powszechność występowania wielowymiarowego rozkładu normalnego jest związana z *centralnymi twierdzeniami granicznymi*, które mówią, że n -wymiarowy wektor losowy będący wektorową sumą dużej liczby N niezależnych n -wymiarowych wektorów losowych o dowolnych rozkładach, w granicy $N \rightarrow \infty$ ma n -wymiarowy rozkład normalny przy stosunkowo ogólnych założeniach.

Proces stochastyczny $(X_t)_{t \in T}$ jest *normalny* (*gaussowski*, *Gaussa*), jeśli dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego wyboru chwil $t_1, \dots, t_n \in T$, n -wymiarowy wektor losowy $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ ma n -wymiarowy rozkład normalny.

Normalny proces stochastyczny stacjonarny w szerszym sensie jest procesem stochastycznym stacjonarnym w sensie węższym.

VI. ZESPOLONE ZMIENNE LOSOWE

Rozważane dotąd zmienne losowe będące odwzorowaniami o wartościach rzeczywistych, $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, można nazwać *rzeczywistymi* zmiennymi losowymi. Rozważmy odwzorowanie o wartościach zespolonych:

$$Z: \Omega \rightarrow \mathbb{C}, \quad (6.1a)$$

$$\Omega \ni \zeta \mapsto Z(\zeta) = \operatorname{Re}(Z(\zeta)) + i \operatorname{Im}(Z(\zeta)) \in \mathbb{C}; \quad (6.1b)$$

tutaj i oznacza jednostkę urojoną, natomiast $\operatorname{Re}z$ i $\operatorname{Im}z$ część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej $z \in \mathbb{C}$. Definiujemy część rzeczywistą $\operatorname{Re}Z$ i część urojoną $\operatorname{Im}Z$ odwzorowania Z :

$$(\operatorname{Re}Z)(\zeta) := \operatorname{Re}(Z(\zeta)), \quad (\operatorname{Im}Z)(\zeta) := \operatorname{Im}(Z(\zeta)). \quad (6.2)$$

Zespoloną zmienną losową nazywamy odwzorowanie $Z: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ takie, że odwzorowania $X := \operatorname{Re}Z$ i $Y := \operatorname{Im}Z$ są rzeczywistymi zmiennymi losowymi.

Przykład 6.1. Jednokrotny rzut kostką. Przestrzenią zdarzeń elementarnych jest zbiór $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_6\}$. Zdefiniujemy

$$\Omega \ni \omega_k \mapsto Z(\omega_k) := k + ik^2 \in \mathbb{C}, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (6.3)$$

Wówczas

$$(\operatorname{Re}Z)(\omega_k) = k, \quad (\operatorname{Im}Z)(\omega_k) = k^2, \quad k = 1, \dots, 6. \quad (6.4)$$

Dalej będziemy rozważać tylko takie zespolone zmienne losowe Z , dla których określona jest łączna gęstość prawdopodobieństwa zmiennych losowych $X := \operatorname{Re}Z$ i $Y := \operatorname{Im}Z$. Wówczas *gęstością prawdopodobieństwa p_Z zmiennej losowej Z* nazwiemy tę właśnie łączną gęstość prawdopodobieństwa zmiennych losowych X i Y :

$$\mathbb{C} \ni z = x + iy, \quad p_Z(z) := p_{X,Y}(x, y); \quad (6.5)$$

p_Z jest zatem funkcją o wartościach rzeczywistych.

Wartość oczekiwana zmiennej losowej Z :

$$m_Z = E(Z) := \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy (x + iy) p_{X,Y}(x, y). \quad (6.6)$$

Zachodzi wzór:

$$E(Z) = E(X) + iE(Y). \quad (6.7)$$

DOWÓD.

$$E(Z) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy (x + iy) p_{X,Y}(x, y) \quad (6.8a)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy x p_{X,Y}(x, y) + i \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy y p_{X,Y}(x, y) \quad (6.8b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dy \right) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} p_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \quad (6.8c)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x p_X(x) dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} y p_Y(y) dy \quad (6.8d)$$

$$= E(X) + iE(Y). \quad (6.8e)$$

Jeżeli g jest dowolną funkcją jednej zmiennej, to

$$E(g(Z)) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy g(x + iy) p_{X,Y}(x, y). \quad (6.9)$$

Wynika stąd, że

$$[E(g(Z))]^* = E((g(Z))^*), \quad (6.10)$$

w szczególności

$$(E(Z))^* = E(Z^*). \quad (6.11)$$

Łatwo można pokazać, że

$$E(|Z|^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy (x^2 + y^2) p_{X,Y}(x, y) = E(X^2) + E(Y^2). \quad (6.12)$$

Wariancja zmiennej losowej Z:

$$V_Z := E(|Z - m_Z|^2), \quad V_Z \in \mathbb{R}. \quad (6.13)$$

Odchylenie standardowe zmiennej losowej Z:

$$\sigma_Z := +\sqrt{V_Z} = +\sqrt{E(|Z - m_Z|^2)}. \quad (6.14)$$

Ponieważ

$$|Z - m_Z|^2 = (X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2, \quad (6.15)$$

możemy związać wariancję σ_Z^2 z wariancjami σ_X^2 i σ_Y^2 :

$$\sigma_Z^2 = E(|Z - m_Z|^2) \quad (6.16a)$$

$$= E((X - m_X)^2 + (Y - m_Y)^2) \quad (6.16b)$$

$$= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2. \quad (6.16c)$$

Korzystając ze wzoru (6.12) oraz z tego, że

$$\sigma_X^2 = E(X^2) - (E(X))^2, \quad \sigma_Y^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2, \quad (6.17)$$

mamy również

$$\sigma_Z^2 = E(|Z|^2) - |m_Z|^2. \quad (6.18)$$

Rozważmy dwie zespolone zmienne losowe: $W = U + iV$ oraz $Z = X + iY$, gdzie U, V, X, Y są rzeczywistymi zmiennymi losowymi. Łączną gęstością prawdopodobieństwa W i Z jest

$$p_{W,Z}(w, z) := p_{U,V,X,Y}(u, v, x, y), \quad \text{gdzie } w = u + iv \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}. \quad (6.19)$$

Kowariancja zespolonych zmiennych losowych W i Z :

$$C_{W,Z} := E((W - m_W)(Z - m_Z)^*). \quad (6.20)$$

Współczynnik korelacji zespolonych zmiennych losowych W i Z :

$$\rho_{W,Z} := \frac{C_{W,Z}}{\sigma_W \sigma_Z}. \quad (6.21)$$

Dla zespolonych wektorów losowych \vec{W} i \vec{Z} definiujemy macierze kowariancji:

$$C_{\vec{W}} := E((\vec{W} - m_{\vec{W}}) \cdot (\vec{W} - m_{\vec{W}})^\dagger), \quad (6.22a)$$

$$C_{\vec{W}, \vec{Z}} := E((\vec{W} - m_{\vec{W}}) \cdot (\vec{Z} - m_{\vec{Z}})^\dagger), \quad (6.22b)$$

gdzie \dagger oznacza sprzężenie hermitowskie (czyli sprzężenie zespolone plus transpozycję).

VII. ZESPOLONE PROCESY STOCHASTYCZNE

Zespolonym procesem stochastycznym $(Z_t)_{t \in T}$ nazywamy odwzorowanie

$$T \ni t \mapsto Z_t = X_t + iY_t \quad (7.1)$$

takie, że $(X_t)_{t \in T}$ i $(Y_t)_{t \in T}$ są rzeczywistymi procesami stochastycznymi zdefiniowanymi na tej samej ustalonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, \mathcal{S}, P) .

Wartość oczekiwana (średnia) procesu stochastycznego (Z_t) :

$$m_Z(t) := E(Z_t), \quad (7.2)$$

Zachodzi wzór:

$$m_Z(t) = m_X(t) + i m_Y(t). \quad (7.3)$$

gdzie $m_X(t)$ i $m_Y(t)$ są wartościami oczekiwanymi rzeczywistych procesów stochastycznych odpowiednio (X_t) i (Y_t) .

Funkcja autokorelacji procesu stochastycznego (Z_t) :

$$K_Z(t_1, t_2) := E(Z_{t_1} Z_{t_2}^*). \quad (7.4)$$

Zachodzi wzór:

$$K_Z(t_2, t_1) = \left(K_Z(t_1, t_2) \right)^* = K_Z^*(t_1, t_2). \quad (7.5)$$

Wariancja V_Z i odchylenie standardowe σ_Z procesu stochastycznego (Z_t) :

$$V_Z(t) := E(|Z_t - m_Z(t)|^2), \quad \sigma_Z(t) := +\sqrt{V_Z(t)}. \quad (7.6)$$

Zachodzą wzory:

$$V_Z(t) = E(|Z_t|^2) - |m_Z(t)|^2 \quad (7.7a)$$

$$= K_Z(t, t) - |m_Z(t)|^2 \quad (7.7b)$$

$$= V_X(t) + V_Y(t), \quad (7.7c)$$

gdzie $V_X(t)$ i $V_Y(t)$ są wariancjami rzeczywistych procesów stochastycznych odpowiednio (X_t) i (Y_t) .

Każdemu zespolonemu n -wymiarowemu wektorowi losowemu $(Z_{t_1}, \dots, Z_{t_n})$ można przyporządkować rzeczywisty $2n$ -wymiarowy wektor losowy $(X_{t_1}, Y_{t_1}, \dots, X_{t_n}, Y_{t_n})$, gdzie $Z_{t_1} = X_{t_1} + iY_{t_1}, \dots, Z_{t_n} = X_{t_n} + iY_{t_n}$.

Ograniczymy się do przypadku, gdy można zdefiniować łączną gęstość prawdopodobieństwa $p_{t_1, \dots, t_n}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ wektora losowego $(X_{t_1}, Y_{t_1}, \dots, X_{t_n}, Y_{t_n})$. Wówczas wartość oczekiwaną procesu stochastycznego (Z_t) obliczamy za pomocą całki podwójnej

$$m_Z(t) = E(Z_t) = \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy (x + iy) p_t(x, y), \quad (7.8)$$

natomiast funkcję autokorelacji procesu stochastycznego (Z_t) obliczamy za pomocą całki poczwórnej:

$$K_Z(t_1, t_2) = E(Z_{t_1} Z_{t_2}^*) = \iiint\limits_{\mathbb{R}^4} dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) p_{t_1, t_2}(x_1, y_1, x_2, y_2). \quad (7.9)$$

Niech (W_t) , $W_t = U_t + iV_t$ oraz (Z_t) , $Z_t = X_t + iY_t$, będą zespolonymi procesami stochastycznymi. *Funkcją interkorelacji* między procesami (W_t) i (Z_t) nazywamy

$$K_{WZ}(t_1, t_2) := E(W_{t_1} Z_{t_2}^*). \quad (7.10)$$

Zachodzi wzór:

$$K_{ZW}(t_1, t_2) = K_{WZ}^*(t_2, t_1). \quad (7.11)$$

Widzimy zatem, że funkcje interkorelacji K_{WZ} i K_{ZW} są na ogół różne.

Zespolony proces stochastyczny stacjonarny w szerszym sensie definiujemy dokładnie tak samo, jak rzeczywisty proces stochastyczny stacjonarny w szerszym sensie, to znaczy: zespolony proces stochastyczny (Z_t) jest procesem *stacjonarnym w szerszym sensie*, gdy wartość oczekiwana m_Z jest stała i funkcja autokorelacji $K_Z(t_1, t_2)$ zależy od różnicy $t_1 - t_2$.

Dla procesu stacjonarnego w szerszym sensie możemy zdefiniować nową funkcję autokorelacji R_Z , która jest funkcją jednej zmiennej:

$$R_Z(\tau) := K_Z(t, t - \tau). \quad (7.12)$$

Zachodzi wówczas wzór:

$$K_Z(t_1, t_2) = R_Z(t_1 - t_2). \quad (7.13)$$

Funkcja R_Z ma następujące własności:

- (i) $R_Z(-\tau) = R_Z^*(\tau)$;
- (ii) $R_Z(0) = E(|Z_t|^2) \geq 0$, przy czym $R_Z(0) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy z prawdopodobieństwem 1 $Z_t = 0$ dla każdego $t \in T$;
- (ii) $|R_Z(\tau)| \leq R_Z(0)$.

Zespolone procesy stochastyczne (W_t) i (Z_t) są *łącznie stacjonarne w szerszym sensie*, jeśli oba są stacjonarne w szerszym sensie oraz ich funkcja interkorelacji $K_{WZ}(t_1, t_2)$ zależy od różnicy $t_1 - t_2$. Wówczas definiujemy nową funkcję interkorelacji R_{WZ} , która jest funkcją jednej zmiennej:

$$R_{WZ}(\tau) := K_{WZ}(t, t - \tau). \quad (7.14)$$

Ma ona następujące własności:

- (i) $R_{WZ}(\tau) = R_{ZW}^*(-\tau)$;
- (ii) $|R_{WZ}(\tau)| \leq \sqrt{R_W(0)R_Z(0)}$.

Przykład 7.1. Niech zespolone procesy stochastyczne (W_t) i (Z_t) będą procesami stacjonarnymi w szerszym sensie, niezależnymi od siebie. Zdefiniujmy zespolony proces stochastyczny (S_t) :

$$S_t := W_t Z_t. \quad (7.15)$$

Pokażemy, że proces stochastyczny (S_t) jest również procesem stacjonarnym w szerszym sensie.

Niech $W_t = U_t + iV_t$, $Z_t = X_t + iY_t$, gdzie (U_t) , (V_t) , (X_t) , (Y_t) są rzeczywistymi procesami stochastycznymi.

Obliczamy wartość oczekiwaną $m_S(t)$:

$$m_S(t) = E(S_t) = E(W_t Z_t) \quad (7.16a)$$

$$= \iiint_{\mathbb{R}^4} du dv dx dy (u + iv)(x + iy) p_{U_t V_t X_t Y_t}(u, v, x, y). \quad (7.16b)$$

Niezależność procesów stochastycznych (W_t) i (Z_t) oznacza, że

$$p_{U_t V_t X_t Y_t}(u, v, x, y) = p_{U_t V_t}(u, v) p_{X_t Y_t}(x, y), \quad (7.17)$$

dlatego

$$m_S(t) = \iint_{\mathbb{R}^2} du dv (u + iv) p_{U_t V_t}(u, v) \cdot \iint_{\mathbb{R}^2} dx dy (x + iy) p_{X_t Y_t}(x, y) = m_W m_Z. \quad (7.18)$$

Wartość oczekiwana $m_S(t)$ nie zależy zatem od czasu t , bo m_W i m_Z od t nie zależą.

Obliczamy funkcję autokorelacji $K_S(t, t - \tau)$:

$$K_S(t, t - \tau) = E(S_t S_{t-\tau}^*) \quad (7.19a)$$

$$= E(W_t Z_t (W_{t-\tau} Z_{t-\tau})^*) \quad (7.19b)$$

$$= E(W_t W_{t-\tau}^* Z_t Z_{t-\tau}^*) \quad (7.19c)$$

$$= E(W_t W_{t-\tau}^*) E(Z_t Z_{t-\tau}^*) \quad (7.19d)$$

$$= R_W(\tau) R_Z(\tau), \quad (7.19e)$$

czyli $K_S(t, t - \tau)$ zależy tylko od τ . Możemy zatem zdefiniować

$$R_S(\tau) := K_S(t, t - \tau), \quad (7.20)$$

wówczas

$$R_S(\tau) = R_W(\tau) R_Z(\tau). \quad (7.21)$$

VIII. UŚREDNIANIE W CZASIE I ERGODYCZNE PROCESY STOCHASTYCZNE

W praktyce często mamy do dyspozycji tylko jedną realizację badanego procesu stochastycznego. Jeśli chcemy sprawdzić, czy proces stochastyczny, którego jedną tylko realizację posiadamy, ma spodziewane przez nas własności probabilistyczne, musimy *uśrednianie po zespole realizacji* zastąpić *uśrednianiem w czasie*. Procesy, dla których taka procedura jest poprawna, nazywa się procesami *ergodycznymi*.

Niech $x(t) := \mathbf{X}_t(\omega)$, $\omega \in \Omega$, będzie ustaloną realizacją procesu stochastycznego $(\mathbf{X}_t)_{t \in T}$. Średnią w czasie realizacji $x(t)$ nazywamy

$$\langle x(t) \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt. \quad (8.1)$$

Jeśli dla prawie wszystkich realizacji („prawie wszystkich” znaczy: dla wszystkich z być może wyjątkiem pewnych realizacji, których pojawienie się ma zerowe prawdopodobieństwo) spełnione jest równanie

$$E(\mathbf{X}_t) = \langle x(t) \rangle, \quad (8.2)$$

to proces stochastyczny (\mathbf{X}_t) nazywamy procesem *o ergodycznej średniej*.

Jeśli dla dowolnej funkcji h ,

$$E(h(\mathbf{X}_t)) = \langle h(x(t)) \rangle, \quad (8.3)$$

to proces stochastyczny (\mathbf{X}_t) nazywamy procesem *ergodycznym*.

Funkcja autokorelacji ustalonej realizacji $z(t)$ zespolonego procesu stochastycznego (\mathbf{Z}_t) :

$$\mathcal{R}_z(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} z(t) z^*(t - \tau) dt. \quad (8.4)$$

Funkcja interkorelacji między realizacjami $w(t)$ i $z(t)$ zespolonych procesów stochastycznych odpowiednio (\mathbf{W}_t) i (\mathbf{Z}_t) :

$$\mathcal{R}_{wz}(\tau) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} w(t) z^*(t - \tau) dt. \quad (8.5)$$

Jeśli (\mathbf{W}_t) i (\mathbf{Z}_t) są procesami ergodycznymi, to

$$\mathcal{R}_z(\tau) = R_Z(\tau), \quad \mathcal{R}_{wz}(\tau) = R_{WZ}(\tau). \quad (8.6)$$

Przykład 8.1. Rozważmy rzeczywisty proces stochastyczny

$$X_t := A \cos(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (8.7)$$

gdzie A jest ciągłą zmienną losową o *rozkładzie Rayleigha* (o gęstości prawdopodobieństwa $p(a) = 0$ dla $a < 0$ i $p(a) = ae^{-a^2/2}$ dla $a \geq 0$), Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi \rangle$, zmienne losowe A i Θ są niezależne.

Łatwo pokażemy, że proces stochastyczny (X_t) jest procesem o ergodycznej średniej:

$$E(X_t) = E(A) E(\cos(\omega_0 t + \Theta)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot 0 = 0, \quad (8.8a)$$

$$\langle x(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a \cos(\omega_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(2a \cos \theta \frac{\sin \frac{\omega_0 T}{2}}{\omega_0 T} \right) = 0, \quad (8.8b)$$

zatem $E(X_t) = \langle x(t) \rangle = 0$.

Proces stochastyczny (X_t) nie jest jednak procesem ergodycznym. By to pokazać, porównamy średnie $E(X_t^2)$ i $\langle x^2(t) \rangle$:

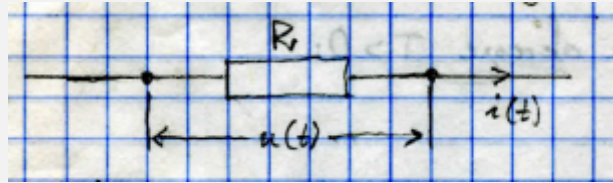
$$E(X_t^2) = E(A^2) E(\cos^2(\omega_0 t + \Theta)) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad (8.9a)$$

$$\langle x^2(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} a^2 \cos^2(\omega_0 t + \theta) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} a^2 \left(1 + \cos 2\theta \frac{\sin \omega_0 T}{\omega_0 T} \right) \right] = \frac{1}{2} a^2, \quad (8.9b)$$

zatem na ogół $E(X_t^2) \neq \langle x^2(t) \rangle$ i warunek (8.3) nie jest spełniony dla funkcji $h(x) := x^2$.

IX. WIDMOWA (SPEKTRALNA) GĘSTOŚĆ MOCY

Przykład 9.1.



Rozważmy opornik o oporze R , przez który płynie prąd elektryczny o natężeniu $i(t)$. Zgodnie z prawem Ohma spadek napięcia $u(t)$ na oporniku wynosi $u(t) = R i(t)$. Chwilowa wartość mocy wydzielanej na oporniku to

$$u(t) i(t) = \frac{1}{R} u^2(t) = R i^2(t), \quad (9.1)$$

natomiast energia wydzielona na oporniku w przedziale czasu $\langle t_1; t_2 \rangle$ wynosi

$$\int_{t_1}^{t_2} u(t) i(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{R} u^2(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} R i^2(t) dt. \quad (9.2)$$

„Energia” sygnału deterministycznego $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$, być może o wartościach zespolonych, nazywamy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt, \quad (9.3)$$

wielkość $|x(t)|^2$ możemy zatem nazwać „chwilową mocą” sygnału.

Niektóre sygnały (np. sygnały periodyczne $\sin \omega t$, $\cos \omega t$) nie mają skończonej energii, mają natomiast skończoną średnią moc zdefiniowaną następująco:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty. \quad (9.4)$$

Przykład 9.2. Obliczmy średnią moc sygnału periodycznego $x(t) = A \sin \omega t$ o stałych częstotliwości ω i amplitudzie A :

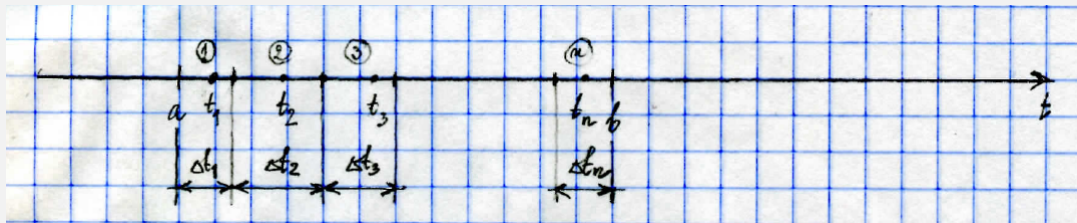
$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A^2 \sin^2 \omega t dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2} A^2 \left(1 - \frac{\sin \omega T}{\omega T} \right) = \frac{1}{2} A^2. \quad (9.5)$$

Dla procesu stochastycznego (X_t) wyrażenia analogiczne do równań (9.3) i (9.4), które napisaliśmy dla sygnałów deterministycznych, wyglądają następująco:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |X_t|^2 dt, \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |X_t|^2 dt. \quad (9.6)$$

Są to więc całki, w których wyrażenia podcałkowe są zmiennymi losowymi. Całki takie można matematycznie precyzyjnie zdefiniować, czego nie będziemy robić. Ograniczymy się do kilku uwag.

Całka procesu stochastycznego.



Całkę procesu stochastycznego definiujemy następująco:

$$\int_a^b X_t dt := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n X_{t_i} \Delta t_i. \quad (9.7)$$

W powyższym wzorze suma Riemanna $\sum_{i=1}^n X_{t_i} \Delta t_i$ jest zmienną losową, a granicę ciągu zmiennych losowych definiuje się w odpowiedni sposób.

Dla nas ważne jest, że zachodzi następujący wzór:

$$E \left(\int_a^b X_t dt \right) = \int_a^b E(X_t) dt, \quad (9.8)$$

który można uzasadnić następująco:

$$E \left(\int_a^b X_t dt \right) \cong E \left(\sum_{i=1}^n X_{t_i} \Delta t_i \right) = \sum_{i=1}^n E(X_{t_i} \Delta t_i) = \sum_{i=1}^n E(X_{t_i}) \Delta t_i \cong \int_a^b E(X_t) dt. \quad (9.9)$$

Całki zmiennych losowych, których przykłady podaliśmy w równaniu (9.6), same są zmiennymi losowymi, możemy więc obliczać ich wartości oczekiwane. Ponieważ wiele procesów stochastycznych ma nieskończoną wartość oczekiwaną energii, wygodniej jest rozważać wartość oczekiwaną średniej mocy procesu. Rozważmy zatem proces stochastyczny (X_t),

$-\infty < t < +\infty$. Wartością oczekiwaną średniej mocy procesu stochastycznego (\mathbf{X}_t) nazywamy

$$P_{\mathbf{X}} := \mathbb{E} \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\mathbf{X}_t|^2 dt \right). \quad (9.10)$$

Jeśli (\mathbf{X}_t) jest procesem stochastycznym *stacjonarnym w szerszym sensie*, to, korzystając ze wzoru (9.8), mamy

$$P_{\mathbf{X}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbb{E} (|\mathbf{X}_t|^2) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} R_{\mathbf{X}}(0) dt = R_{\mathbf{X}}(0) = \mathbb{E} (|\mathbf{X}_t|^2). \quad (9.11)$$

Oznaczmy przez $S_{\mathbf{X}}$ transformatę Fouriera funkcji autokorelacji $R_{\mathbf{X}}$ procesu (\mathbf{X}_t) :

$$S_{\mathbf{X}}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathbf{X}}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, \quad -\infty < f < +\infty. \quad (9.12)$$

Wówczas

$$R_{\mathbf{X}}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbf{X}}(f) e^{+2\pi i f \tau} df, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (9.13)$$

Mamy zatem

$$P_{\mathbf{X}} = \mathbb{E} (|\mathbf{X}_t|^2) = R_{\mathbf{X}}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\mathbf{X}}(f) df; \quad (9.14)$$

$S_{\mathbf{X}}$ nazywamy *widmową* (inaczej *spektralną*) *gęstością mocy* procesu stochastycznego (\mathbf{X}_t) .

Dla procesu stochastycznego stacjonarnego w szerszym sensie $P_{\mathbf{X}} = \mathbb{E} (|\mathbf{X}_t|^2)$, zatem wartość oczekiwana średniej mocy jest równa wartości oczekiwanej chwilowej mocy tego procesu.

Zdefiniujmy teraz (zobacz Rys. 10):

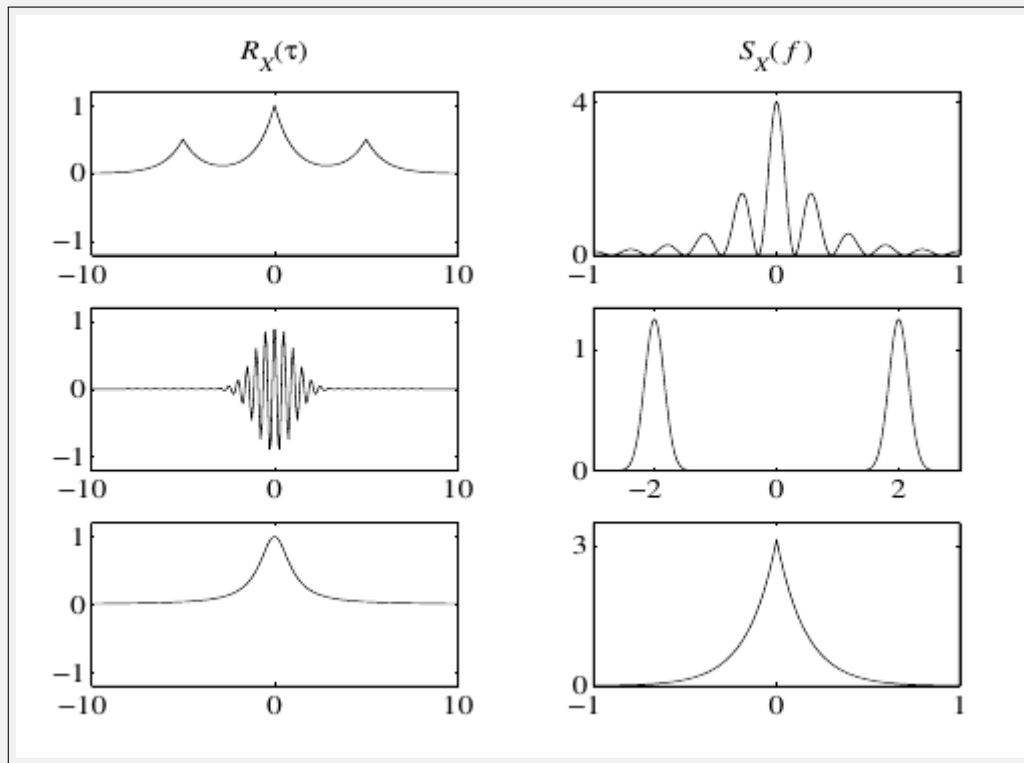
$$\mathbf{X}_t^T := \begin{cases} \mathbf{X}_t, & |t| \leq T/2, \\ 0, & |t| > T/2, \end{cases} \quad (9.15)$$

oraz niech $\tilde{\mathbf{X}}_f^T$ oznacza transformatę Fouriera procesu stochastycznego (\mathbf{X}_t^T) :

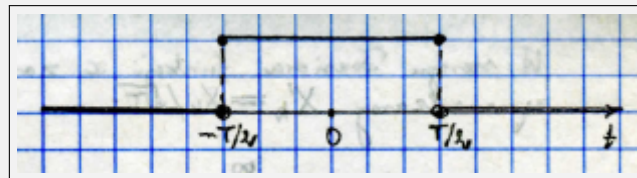
$$\tilde{\mathbf{X}}_f^T = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{X}_t^T e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbf{X}_t e^{-2\pi i f t} dt. \quad (9.16)$$

Twierdzenie Wienera-Chinczyna powiada, że

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} (|\tilde{\mathbf{X}}_f^T|^2)}{T} = S_{\mathbf{X}}(f). \quad (9.17)$$



Rysunek 9: Trzy przykłady funkcji autokorelacji R_X oraz odpowiadających im widmowych gęstości mocy S_X .



Rysunek 10: Proces stochastyczny (X_t) , zdefiniowany dla każdego $t \in \mathbb{R}$, ograniczony do przedziału $\langle -T/2; T/2 \rangle$ staje się procesem (X_t^T) .

Z twierdzenia tego wynika, że $S_X(f)df$ jest średnią mocą procesu stochastycznego w przedziale częstotliwości $f, f + df$. Wynika z niego również, że S_X jest funkcją rzeczywistą i nieujemną (nawet wtedy, gdy (X_t) jest zespolonym procesem stochastycznym), czyli

$$S_X(f) \geq 0 \quad \text{dla każdego } -\infty < f < +\infty. \quad (9.18)$$

Jeżeli (X_t) jest rzeczywistym procesem stochastycznym, to S_X jest rzeczywistą funkcją pa-

rzystą (przypomnijmy, że dla rzeczywistego procesu stochastycznego funkcja autokorelacji R_X jest rzeczywistą funkcją parzystą):

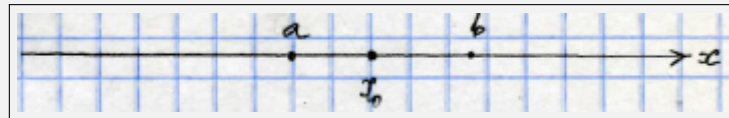
$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau \quad (9.19a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau - i \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{R_X(\tau) \sin(2\pi f \tau)}_{\text{funkcja nieparzysta, dlatego } \int = 0} d\tau \quad (9.19b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) \cos(2\pi f \tau) d\tau, \quad (9.19c)$$

skąd wynika, że $S_X(f) \in \mathbb{R}$ oraz $S_X(-f) = S_X(f)$.

Funkcja (dystrybucja) delta Diraca.



Funkcja delta Diraca $\delta(x - x_0)$ zdefiniowana jest za pomocą dwóch warunków:

- dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\delta(x - x_0) = 0, \quad \text{gdy } x \neq x_0; \quad (9.20a)$$

- jeśli $x \in (a; b)$ i funkcja ϕ jest dobrze określona w pewnym otoczeniu x_0 , to

$$\int_a^b \delta(x - x_0) \phi(x) dx = \phi(x_0) \quad \text{dla każdej funkcji } \phi. \quad (9.20b)$$

W szczególności

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (9.20c)$$

Reprezentacja całkowa delty Diraca:

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{+2\pi i f t} df. \quad (9.21a)$$

Ponieważ $\delta(-t) = \delta(t)$, prawdą jest również, że

$$\delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi i f t} df. \quad (9.21b)$$

Przykład 9.3. Widmowa gęstość mocy procesu stochastycznego drgań harmonicznych.

Niech

$$X_t := A \cos(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (9.22)$$

gdzie $A > 0$ i $\omega_0 > 0$ są stałymi, zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0; 2\pi)$. Funkcją autokorelacji procesu stochastycznego (X_t) jest $R_X(\tau) = \frac{1}{2}A \cos(\omega_0 \tau)$.

Skorzystamy z formuły

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} + e^{i\alpha}), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (9.23a)$$

która wynika ze wzorów:

$$e^{-i\alpha} = \cos \alpha - i \sin \alpha, \quad e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha. \quad (9.23b)$$

Obliczamy gęstość widmową procesu stochastycznego (X_t) :

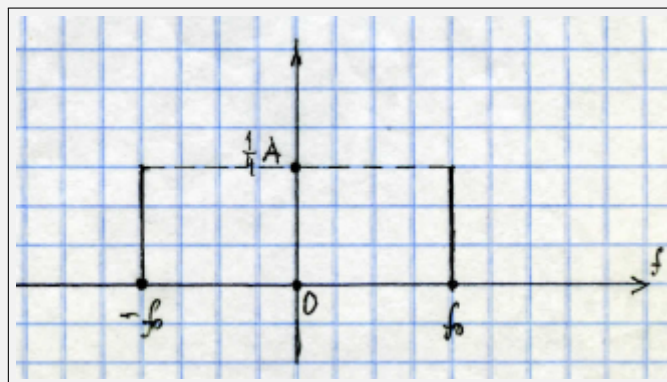
$$S_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \frac{1}{4}A \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-i\omega_0 \tau} + e^{i\omega_0 \tau}) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (9.24)$$

Wprowadźmy $f_0 := \frac{\omega_0}{2\pi}$ (czyli $\omega_0 = 2\pi f_0$), wówczas

$$S_X(f) = \frac{1}{4}A \int_{-\infty}^{+\infty} (e^{-2\pi i(f_0+f)\tau} + e^{2\pi i(f_0-f)\tau}) d\tau \quad (9.25a)$$

$$= \frac{1}{4}A (\delta(f_0 + f) + \delta(f_0 - f)) \quad (9.25b)$$

$$= \frac{1}{4}A (\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)). \quad (9.25c)$$



Niech (X_t) i (Y_t) będą procesami stochastycznymi łącznie stacjonarnymi w szerszym sensie. Ich *wzajemną gęstość widmową* S_{XY} definiujemy jako transformatę Fouriera funkcji interkorelacji R_{XY} :

$$S_{XY}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, \quad -\infty < f < +\infty. \quad (9.26)$$

Funkcję interkorelacji R_{XY} możemy wyrazić przez wzajemną gęstość widmową S_{XY} :

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(f) e^{+2\pi i f \tau} df, \quad -\infty < \tau < +\infty. \quad (9.27)$$

Zachodzi wzór

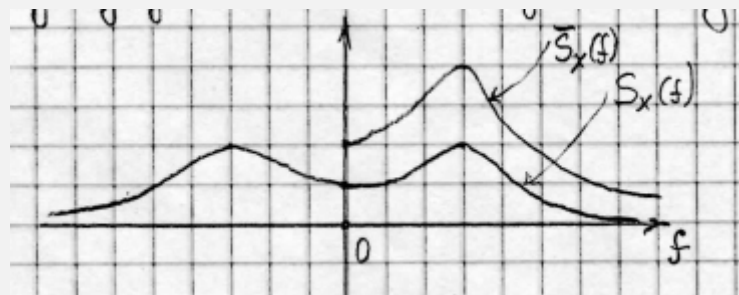
$$R_{XY}(0) = E(X_t Y_t^*) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{XY}(f) df. \quad (9.28)$$

Własności wzajemnej gęstości widmowej S_{XY} :

(i) $S_{YX}(f) = S_{XY}^*(f)$,

(ii) dla rzeczywistych procesów stochastycznych (X_t) i (Y_t) (wówczas R_{XY} jest funkcją o wartościach rzeczywistych) zachodzi

$$S_{YX}(f) = S_{XY}(-f) = S_{XY}^*(f).$$



Rysunek 11: Dwustronna S_X i jednostronna \bar{S}_X widmowa gęstość mocy rzeczywistego procesu stochastycznego (X_t) . Przypomnijmy, że dwustronna gęstość widmowa S_X rzeczywistego procesu stochastycznego jest funkcją parzystą: $S_X(-f) = S_X(f)$.

Dla rzeczywistych procesów stochastycznych (X_t) i (Y_t) można zdefiniować *jednostronne* widmowe gęstości mocy. Wówczas widmowe gęstości mocy zdefiniowane wyżej za pomocą

równań (9.12) i (9.26), nazywamy *dwustronnymi* gęstościami mocy. Jednostronna widmowa gęstość mocy rzeczywistego procesu stochastycznego (X_t) zdefiniowana jest następująco:

$$\bar{S}_X(f) := \begin{cases} 2S_X(f), & 0 \leq f < +\infty, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (9.29)$$

Zachodzi wzór:

$$E(X_t^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_X(f) df = \int_0^{+\infty} \bar{S}_X(f) df. \quad (9.30)$$

Jednostronna wzajemna widmowa gęstość mocy rzeczywistych procesów stochastycznych (X_t) i (Y_t) to

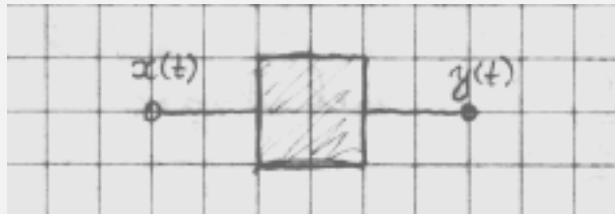
$$\bar{S}_{XY}(f) := \begin{cases} 2S_{XY}(f), & 0 \leq f < +\infty, \\ 0, & f < 0. \end{cases} \quad (9.31)$$

X. UKŁADY LINIOWE

Układ fizyczny to wyodrębniony z otaczającego świata obiekt lub zbiór obiektów, którego właściwości lub zjawiska w nim zachodzące są przedmiotem badań.

Układ nazywamy *liniowym*, jeśli zachodzące w nim procesy opisują *równania liniowe*.

Układem liniowym jest np. układ elektryczny, którego opór, pojemność i indukcyjność nie zależą od napięcia i natężenia prądu.



Rysunek 12: Symboliczne przedstawienie układu o sygnale wejściowym $x(t)$ i sygnale wyjściowym $y(t)$.

W naszych rozważaniach przyjmiemy, że układ jest liniowy, jeśli pomiędzy sygnałem wejściowym $x(t)$ a sygnałem wyjściowym $y(t)$ zachodzi następujący związek:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') x(t') dt'. \quad (10.1)$$

Funkcję $h(t, t')$ nazywamy *odpowiedzią impulsową* układu:

$$x(t) = \delta(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') \delta(t' - t_0) dt' = h(t, t_0). \quad (10.2)$$

Niech sygnał wejściowy $x(t)$ będzie kombinacją liniową sygnałów $x_1(t)$ i $x_2(t)$:

$$x(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t), \quad (10.3)$$

gdzie a_1 i a_2 są stałymi współczynnikami. Niech

$$y_k(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') x_k(t') dt', \quad k = 1, 2. \quad (10.4)$$

Wówczas ze wzoru (10.1) wynika, że

$$y(t) = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t). \quad (10.5)$$

Widzimy zatem, że jeśli sygnał wejściowy jest kombinacją liniową sygnałów (nazwijmy je składowymi), to sygnał wyjściowy jest kombinacją liniową sygnałów wyjściowych odpowiadających poszczególnym składowym sygnału wejściowego.

Jeśli $h(t, t')$ zależy tylko od różnicy $t - t'$, to układ nazywamy *stacjonarnym* (każdy układ o stałych w czasie parametrach jest stacjonarny). Dla układu stacjonarnego możemy zatem napisać

$$\boxed{h(t, t') = h(t - t')} \quad (10.6)$$

Wówczas wzór (10.1) przyjmuje postać

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t') x(t') dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') x(t - t') dt'} \quad (10.7)$$

Przypomnijmy teraz wzór na transformatę Fouriera \tilde{g} funkcji g :

$$\tilde{g}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (10.8)$$

Wówczas

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(f) e^{+2\pi i f t} df. \quad (10.9)$$

Dla układu stacjonarnego zachodzi prosty związek pomiędzy transformacjami Fouriera sygnału wyjściowego i wejściowego:

$$\boxed{\tilde{y}(f) = \tilde{h}(f) \tilde{x}(f)}, \quad (10.10)$$

transformatę Fouriera $\tilde{h}(f)$ odpowiedzi impulsowej układu nazywa się *transmitancją* układu.

DOWÓD.

$$\tilde{y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad (10.11a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t') x(t - t') dt' \right) e^{-2\pi i f t} dt \quad (10.11b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t') e^{-2\pi i f t} dt \right) dt'. \quad (10.11c)$$

W całce po t zamieniamy zmienną całkowania:

$$t \mapsto \xi := t - t', \quad d\xi = dt, \quad t = t' + \xi. \quad (10.11d)$$

Wówczas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t - t') e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\xi) e^{-2\pi i f(\xi + t')} d\xi = e^{-2\pi i f t'} \tilde{x}(f). \quad (10.11e)$$

Ostatecznie

$$\tilde{y}(f) = \tilde{x}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} h(t') e^{-2\pi i f t'} dt' = \tilde{x}(f) \tilde{h}(f). \quad (10.11f)$$

Stacjonarny układ liniowy nie zmienia częstotliwości sygnału:

$$\boxed{x(t) = A e^{2\pi i f t} \Rightarrow y(t) = A \tilde{h}(f) e^{2\pi i f t}.} \quad (10.12)$$

DOWÓD.

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t') x(t') dt' \quad (10.13a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{h}(f') e^{2\pi i f'(t - t')} df' \right) A e^{2\pi i f t'} dt'. \quad (10.13b)$$

W (10.13b) zamieniamy kolejność całkowania i korzystamy z reprezentacji całkowej δ Diraca:

$$y(t) = A \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i(f - f')t'} dt' \right) \tilde{h}(f') e^{2\pi i f' t} df' \quad (10.13c)$$

$$= A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(f - f') \tilde{h}(f') e^{2\pi i f' t} df' \quad (10.13d)$$

$$= A \tilde{h}(f) e^{2\pi i f t}. \quad (10.13e)$$

Przejdźmy teraz do rozważań, w których $x(t)$ jest realizacją pewnego procesu stochastycznego (X_t) . Wówczas $y(t)$ jest realizacją innego procesu stochastycznego (Y_t) , który, na mocy wzoru (10.1), może być związany z (X_t) za pomocą formuły:

$$\boxed{Y_t := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') X_{t'} dt'.} \quad (10.14)$$

Zauważmy, że jeśli (X_t) jest rzeczywistym procesem stochastycznym i $h(t, t') \in \mathbb{R}$, to (Y_t) jest również rzeczywistym procesem stochastycznym.

Pokażemy najpierw, że *jeśli układ jest stacjonarny i (\mathbf{X}_t) jest procesem stochastycznym stacjonarnym w szerszym sensie, to (\mathbf{Y}_t) jest również procesem stacjonarnym w szerszym sensie.*

Niech $m_{\mathbf{X}}(t) = \mathbb{E}(\mathbf{X}_t)$ i $m_{\mathbf{Y}}(t) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_t)$,

$$m_{\mathbf{Y}}(t) = \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') \mathbf{X}_{t'} dt' \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') \mathbb{E}(\mathbf{X}_{t'}) dt' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') m_{\mathbf{X}}(t') dt'. \quad (10.15)$$

Jeśli $m_{\mathbf{X}}(t) = m_{\mathbf{X}} = \text{const}$, to

$$m_{\mathbf{Y}}(t) = m_{\mathbf{X}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t, t') dt'. \quad (10.16)$$

Jeśli dodatkowo układ jest stacjonarny, to

$$m_{\mathbf{Y}}(t) = m_{\mathbf{X}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - t') dt' = m_{\mathbf{X}} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau = \tilde{h}(0) m_{\mathbf{X}}, \quad (10.17)$$

czyli wówczas

$$\boxed{m_{\mathbf{Y}} = \tilde{h}(0) m_{\mathbf{X}} = \text{const.}} \quad (10.18)$$

Dalej przyjmujemy, że układ jest stacjonarny i obliczamy funkcję autokorelacji procesu stochastycznego (\mathbf{Y}_t) :

$$K_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_{t_1} \mathbf{Y}_{t_2}^*) \quad (10.19a)$$

$$= \mathbb{E} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - t) \mathbf{X}_t dt \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(t_2 - t') \mathbf{X}_{t'}^* dt' \right) \quad (10.19b)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' h(t_1 - t) h^*(t_2 - t') \mathbb{E}(\mathbf{X}_t \mathbf{X}_{t'}^*) \quad (10.19c)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} dt' h(t_1 - t) h^*(t_2 - t') R_{\mathbf{X}}(t - t'). \quad (10.19d)$$

Wprowadzamy nowe zmienne całkowania:

$$t \mapsto u := t_1 - t, \quad t' \mapsto v := t_2 - t', \quad (10.20)$$

wówczas

$$K_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv h(u) h^*(v) R_{\mathbf{X}}(t_1 - t_2 + v - u). \quad (10.21)$$

Funkcja autokorelacji $K_{\mathbf{Y}}(t_1, t_2)$ zależy zatem od t_1 i t_2 wyłącznie przez różnicę $t_1 - t_2$ i możemy zdefiniować

$$R_{\mathbf{Y}}(\tau) := K_{\mathbf{Y}}(t, t - \tau) = \mathbb{E}(\mathbf{Y}_t \mathbf{Y}_{t-\tau}^*). \quad (10.22)$$

Wówczas

$$R_Y(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv h(u) h^*(v) R_X(\tau + v - u). \quad (10.23)$$

Obliczymy następnie funkcję interkorelacji pomiędzy procesami (Y_t) i (X_t) :

$$K_{YX}(t_1, t_2) := E(Y_{t_1} X_{t_2}^*) \quad (10.24a)$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - t) X_t dt \cdot X_{t_2}^*\right) \quad (10.24b)$$

$$= E\left(\int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - t) X_t X_{t_2}^* dt\right) \quad (10.24c)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - t) E(X_t X_{t_2}^*) dt. \quad (10.24d)$$

Zakładamy teraz, że (X_t) jest procesem stochastycznym stacjonarnym w szerszym sensie.

Wówczas

$$E(X_t X_{t_2}^*) = K_X(t, t_2) = R_X(t - t_2) \quad (10.25)$$

i całkę (10.24d) możemy zapisać w postaci

$$K_{YX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t_1 - t) R_X(t - t_2) dt. \quad (10.26)$$

Powyzszą całkę, po zamianie zmiennej całkowania,

$$t \mapsto u := t_1 - t, \quad du = -dt, \quad t = t_1 - u, \quad (10.27)$$

zapisujemy tak:

$$K_{YX}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) R_X(t_1 - t_2 - u) du. \quad (10.28)$$

Możemy zatem zdefiniować $R_{YX}(\tau) := K_Y(t, t - \tau)$,

$$R_{YX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) R_X(\tau - u) du = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau - u) R_X(u) du. \quad (10.29)$$

Pokazaliśmy zatem, że jeżeli (X_t) jest procesem stochastycznym stacjonarnym w szerszym sensie, to procesy (X_t) i (Y_t) są procesami łącznie stacjonarnymi w szerszym sensie.

Obliczmy jeszcze funkcję interkorelacji R_{XY} pomiędzy procesami (X_t) i (Y_t) :

$$R_{XY}(\tau) := E(X_t Y_{t-\tau}^*) \quad (10.30a)$$

$$= \left(\mathbb{E}(Y_{t-\tau} X_t^*) \right)^* \quad (10.30b)$$

$$= \left(K_{YX}(t-\tau, t) \right)^* \quad (10.30c)$$

$$= R_{YX}^*(-\tau). \quad (10.30d)$$

Korzystając z (10.29) możemy napisać

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(u) R_X^*(-\tau - u) du. \quad (10.31)$$

Ponieważ $R_X^*(\tau) = R_X(-\tau)$, ostatecznie mamy

$$\boxed{R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(u) R_X(\tau + u) du.} \quad (10.32)$$

Widmowa gęstość mocy procesu stochastycznego (Y_t) :

$$S_Y(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau R_Y(\tau) e^{-2\pi i f \tau} \quad (10.33a)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv h(u) h^*(v) R_X(\tau + v - u) e^{-2\pi i f \tau}. \quad (10.33b)$$

Najpierw obliczamy całkę ze względu na τ , dokonując w niej zamiany zmiennej całkowania zgodnie ze wzorem

$$\tau \mapsto \xi := \tau + v - u. \quad (10.34a)$$

Otrzymujemy

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau + v - u) e^{-2\pi i f \tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\xi) e^{-2\pi i f \xi} d\xi \cdot e^{-2\pi i f (u-v)} \quad (10.34b)$$

$$= S_X(f) e^{-2\pi i f (u-v)}, \quad (10.34c)$$

co podstawiamy do wzoru (10.33b):

$$S_Y(f) = S_X(f) \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) e^{-2\pi i f u} du \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} h^*(v) e^{+2\pi i f v} dv \quad (10.35a)$$

$$= S_X(f) \tilde{h}(f) \tilde{h}^*(f). \quad (10.35b)$$

Ostatecznie

$$\boxed{S_Y(f) = |\tilde{h}(f)|^2 S_X(f).} \quad (10.36)$$

Na koniec rozważmy wzajemne gęstości widmowe S_{YX} i S_{XY} dla procesów (X_t) i (Y_t) :

$$S_{YX}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{YX}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau, \quad S_{XY}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{XY}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (10.37)$$

Można pokazać, że

$$\boxed{S_{YX}(f) = \tilde{h}(f) S_X(f)}. \quad (10.38)$$

Ponieważ

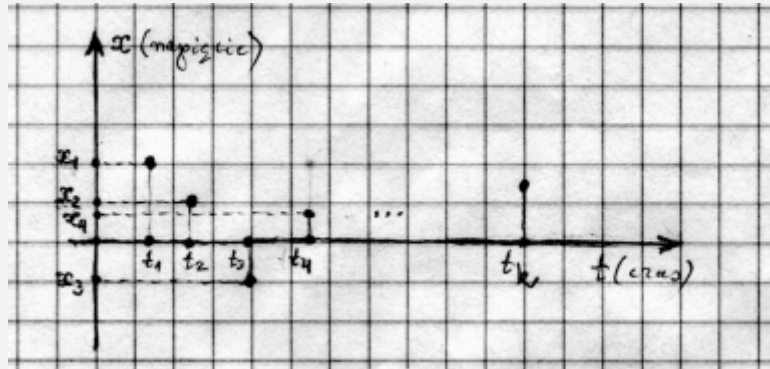
$$S_{XY}(f) = S_{YX}^*(f) \quad \text{i} \quad S_X^*(f) = S_X(f), \quad (10.39)$$

ze wzoru (10.38) natychmiast wynika, że

$$\boxed{S_{XY}(f) = \tilde{h}^*(f) S_X(f)}. \quad (10.40)$$

XI. STATYSTYCZNA TEORIA WYKRYWANIA SYGNAŁÓW W SZUMIE

A. Testowanie hipotez: podejście Neymana-Pearsona



Rysunek 13: Dane są realizacją szeregu czasowego.

Przyjmujemy, że dane rejestrowane przez urządzenie pomiarowe (czyli detektor) są realizacją pewnego szeregu czasowego czyli procesu stochastycznego z czasem dyskretnym:

$$\vec{X} = (X_1, \dots, X_k). \quad (11.1)$$

Podstawowa idea teorii wykrywania sygnałów w szumie polega na tym, że obecność sygnału w danych zmienia łączną gęstość prawdopodobieństwa procesu \vec{X} . Jeśli sygnału nie ma w danych, to gęstością tą jest

$$p_0 = p_0(\vec{x}), \quad (11.2)$$

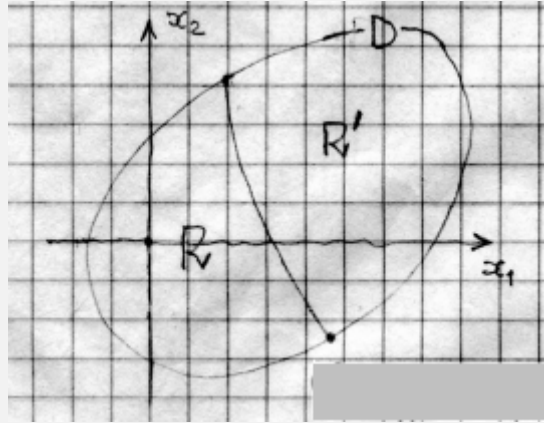
natomiast jeśli sygnał jest obecny w danych, to gęstością jest

$$p_1 = p_1(\vec{x}). \quad (11.3)$$

Problem wykrycia sygnału w szumie formułujemy w języku *testowania hipotez*. Niech $D \subset \mathbb{R}^k$ będzie zbiorem wszystkich możliwych wyników pomiarów. Określenie *testu* polega na podziale zbioru D na dwa rozłączne podzbiory:

$$D = R \cup R', \quad \text{gdzie } R' := D \setminus R, \quad (11.4)$$

oraz przyjęciu następującej procedury:

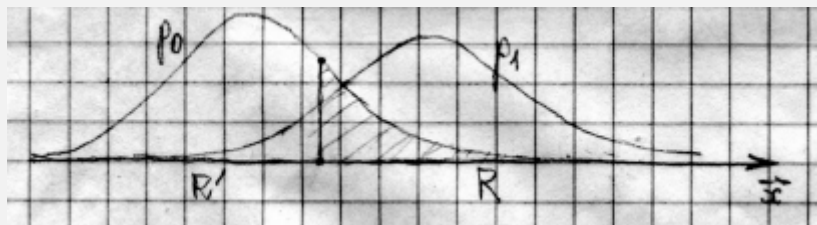


Rysunek 14: Podział zbioru D na dwa rozłączne podzbiory R i R' .

- jeśli $\vec{x} \in R$, to mówimy, że jest sygnał;
- jeśli $\vec{x} \in R'$, to mówimy, że nie ma sygnału.

Możemy popełnić dwojakiego rodzaju błędy:

- błąd 1szego rodzaju czyli fałszywy alarm — wybieramy p_1 , gdy jest p_0 ,
- błąd 2go rodzaju czyli przeoczenie — wybieramy p_0 , gdy jest p_1 .



Rysunek 15: Gęstości prawdopodobieństwa p_0 i p_1 oraz zbiory R i R' .

Prawdopodobieństwo fałszywego alarmu:

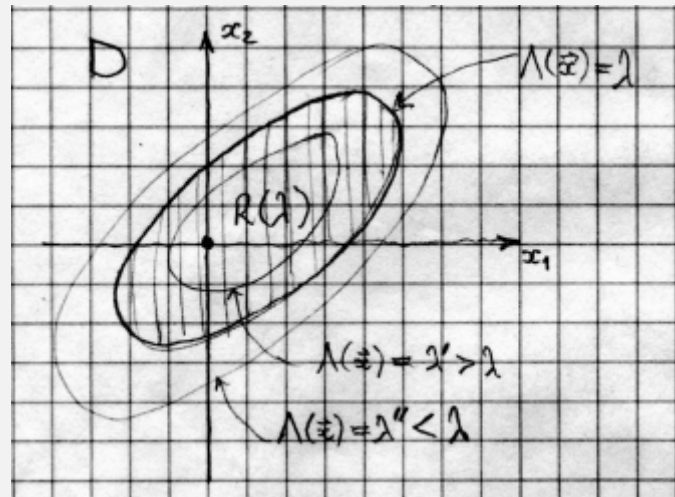
$$P_{\text{fa}}(R) := \int_R p_0(\vec{x}) d\vec{x}; \quad (11.5)$$

prawdopodobieństwo detekcji:

$$P_d(R) := \int_R p_1(\vec{x}) d\vec{x}; \quad (11.6)$$

prawdopodobieństwo przeoczenia:

$$\int_{R'} p_1(\vec{x}) d\vec{x} = 1 - \int_R p_1(\vec{x}) d\vec{x} = 1 - P_d(R). \quad (11.7)$$



Rysunek 16: Poziomice ilorazu wiarygodności $\Lambda(\vec{x})$ i zbiory $R(\lambda)$.

Należy skonstruować *najlepszy* test. *Podejście (kryterium) Neymana-Pearsona*: ustalamy wartość P_{fa} i szukamy testu, który maksymalizuje P_d .

Zdefiniujemy *iloraz wiarygodności*:

$$\Lambda(\vec{x}) := \frac{p_1(\vec{x})}{p_0(\vec{x})} \quad (11.8)$$

i rozważmy rodzinę podzbiorów zbioru D :

$$R(\lambda) := \{\vec{x} \in D : \Lambda(\vec{x}) \geq \lambda\}. \quad (11.9)$$

Test spełniający kryterium Neymana-Pearsona określony jest przez zbiór $R(\lambda_0)$, λ_0 jest *wartością progową* ilorazu wiarygodności, którą obliczamy z warunku:

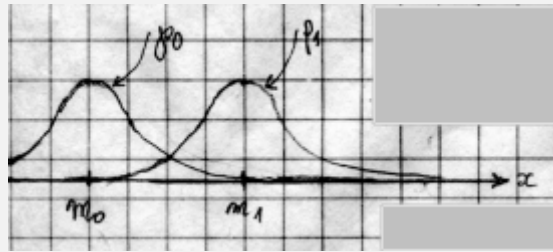
$$P_{fa}(R(\lambda_0)) = \int_{R(\lambda_0)} p_0(\vec{x}) d\vec{x} = \alpha, \quad (11.10)$$

gdzie α jest ustaloną wartością prawdopodobieństwa fałszywego alarmu.

Przykład 11.1. Przesyłamy wiadomość m , która może przybrać jedną z dwóch wartości liczbowych: m_1 albo m_0 , $m_1 > m_0$. Kanał transmisyjny dodaje do wiadomości

szum N , o którym założymy, że jest gaussowską zmienną losową o zerowej wartości średniej i wariancji $\sigma_N^2 > 0$. Wówczas zmienna losowa X opisująca wiadomość otrzymaną może być zapisana w postaci:

$$X = N + m = \begin{cases} N + m_0, & \text{gdy } m = m_0, \\ N + m_1, & \text{gdy } m = m_1. \end{cases} \quad (11.11a)$$



Rysunek 17: Gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Zmienna losowa X ma gęstość prawdopodobieństwa

$$p_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp \left[-\frac{(x - m_0)^2}{2\sigma_N^2} \right], \quad \text{gdy } m = m_0, \quad (11.11b)$$

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} \exp \left[-\frac{(x - m_1)^2}{2\sigma_N^2} \right], \quad \text{gdy } m = m_1. \quad (11.11c)$$

Iloraz wiarygodności ma postać

$$\Lambda(x) = \frac{p_1(x)}{p_0(x)} = \exp \left[-\frac{(x - m_1)^2 - (x - m_0)^2}{2\sigma_N^2} \right]. \quad (11.11d)$$

Rozwiązujemy nierówność

$$\Lambda(x) \geq \lambda_0, \quad (11.11e)$$

która jest równoważna nierówności

$$\ln \Lambda(x) \geq \ln \lambda_0. \quad (11.11f)$$

Korzystając z (11.11d) dostajemy:

$$\ln \Lambda(x) = -\frac{(x - m_1)^2 - (x - m_0)^2}{2\sigma_N^2} \geq \ln \lambda_0 \quad (11.11g)$$

$$\Updownarrow$$

$$(x - m_1)^2 - (x - m_0)^2 \leq -2\sigma_N^2 \ln \lambda_0 \quad (11.11h)$$

$$\Updownarrow$$

$$x \geq x_t := \frac{1}{2}(m_1 + m_0) + \frac{\sigma_N^2 \ln \lambda_0}{2(m_1 - m_0)}. \quad (11.11i)$$

Po ustaleniu wartości prawdopodobieństwa fałszywego alarmu,

$$P_{\text{fa}} = \alpha, \quad (11.11j)$$

wartość progową x_t obliczamy z równania:

$$\alpha = \int_{x_t}^{+\infty} p_0(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_t - m_0)/\sigma_N}^{+\infty} e^{-u^2/2} du. \quad (11.11k)$$

Prawdopodobieństwo detekcji wynosi:

$$P_d = \int_{x_t}^{+\infty} p_1(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_t - m_1)/\sigma_N}^{+\infty} e^{-u^2/2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{(x_t - m_0)/\sigma_N - \rho}^{+\infty} e^{-u^2/2} du, \quad (11.11l)$$

gdzie wprowadziliśmy wielkość ρ zdefiniowaną następująco:

$$\rho := \frac{m_1 - m_0}{\sigma_N} \quad (11.11m)$$

którą nazywamy *stosunkiem sygnał-szum*. Widzimy zatem, że przy ustalonym α prawdopodobieństwo detekcji P_d zależy od stosunku sygnał-szum ρ : P_d rośnie ze wzrostem ρ .

B. Wykrywanie znanego sygnału w addytywnym, gaussowskim i stacjonarnym szumie: filtr dopasowany

Niech dane będą realizacją procesu stochastycznego z czasem ciągłym:

$$\mathbf{X}_t, \quad 0 \leq t \leq T_o. \quad (11.12)$$

W detektorze istnieje szum \mathbf{N}_t , który jest procesem stochastycznym, w danych szukamy *deterministycznego sygnału* h . Zakładamy, że szum jest addytywny:

$$\mathbf{X}_t = \begin{cases} \mathbf{N}_t, & \text{gdy nie ma sygnału w danych,} \\ \mathbf{N}_t + h(t), & \text{gdy sygnał jest obecny w danych.} \end{cases} \quad (11.13)$$

Zakładamy dalej, że szum jest procesem stochastycznym:

- o zerowej wartości średniej,
- gaussowskim (czyli zmienne $\mathbf{N}_{t_1}, \dots, \mathbf{N}_{t_m}$ mają m -wymiarowy rozkład Gaussa dla każdego $m \in \mathbb{N}$ i dowolnego wyboru chwil t_1, \dots, t_m),
- ściśle stacjonarnym (czyli jego własności probabilistyczne nie zależą od wyboru punktu zerowego na osi czasu; dla procesu gaussowskiego ścisła stacjonarność jest równoważna stacjonarności w szerszym sensie).

Wówczas można pokazać, że logarytm ilorazu wiarygodności ma postać

$$\ln \Lambda(x) = (x|h) - \frac{1}{2}(h|h). \quad (11.14)$$

Wprowadzony wyżej iloczyn skalarny $(\cdot|\cdot)$ jest zdefiniowany następująco:

$$(x|y) := 4\text{Re} \int_0^{+\infty} \frac{\tilde{x}(f) \tilde{y}^*(f)}{\bar{S}_{\mathbf{N}}(f)} df, \quad (11.15)$$

gdzie \tilde{x} oznacza transformatę Fouriera x , $\bar{S}_{\mathbf{N}}$ jest jednostronną (tj. określoną dla $f \geq 0$) widmową gęstością mocy szumu.

Przypomnijmy, że funkcją autokorelacji szumu jest $K_{\mathbf{N}}(t, t') := \mathbf{E}(\mathbf{N}_t \mathbf{N}_{t'})$, dla szumu stacjonarnego w szerszym sensie $K_{\mathbf{N}}$ jest funkcją $t - t'$ i możemy zdefiniować

$$R_{\mathbf{N}}(\tau) := K_{\mathbf{N}}(t, t - \tau). \quad (11.16)$$

Wówczas, dla $f \geq 0$,

$$\bar{S}_{\mathbf{N}}(f) = 2\tilde{R}_{\mathbf{N}}(f) = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} R_{\mathbf{N}}(\tau) e^{-2\pi i f \tau} d\tau. \quad (11.17)$$

Prawdopodobieństwo detekcji sygnału zależy od stosunku sygnał-szum, który można obliczyć za pomocą formuły:

$$\rho := \sqrt{(h|h)} = 2 \left(\int_0^{+\infty} \frac{|\tilde{h}(f)|^2}{\bar{S}_{\mathbf{N}}(f)} df \right)^{1/2}. \quad (11.18)$$

C. Estymacja parametrów sygnału i ich błędów: macierz Fishera

Niech szukany sygnał h zależy od m parametrów $\theta_1, \dots, \theta_m$ o nieznannej z góry wartości:

$$h = h(t; \vec{\theta}), \quad \vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_m). \quad (11.19)$$

Wówczas gęstość prawdopodobieństwa p_1 i iloraz wiarygodności Λ stają się funkcjami parametrów $\vec{\theta}$:

$$\Lambda(x; \vec{\theta}) := \frac{p_1(x; \vec{\theta})}{p_0(x)}. \quad (11.20)$$

Estymatorami największej wiarygodności są te wartości $\hat{\theta}_i$ parametrów θ_i , które maksymalizują $\Lambda(x; \vec{\theta})$. Warunkiem koniecznym na to jest spełnienie równań

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \Lambda(x; \vec{\theta}) = 0, \quad i = 1, \dots, m. \quad (11.21)$$

Asymptotycznie, tj. dla $\rho \rightarrow \infty$, estymatory największej wiarygodności:

- są nieobciążone, tj. $E(\hat{\theta}_i) = \theta_i$;
- mają rozkład Gaussa z macierzą kowariancji równą odwrotności macierzy informacyjnej Fishera Γ :

$$E((\theta_i - \hat{\theta}_i)(\theta_j - \hat{\theta}_j)) = (\Gamma^{-1})_{ij}, \quad (11.22)$$

gdzie

$$\Gamma_{ij} := E \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln \Lambda(x; \vec{\theta}) \right).$$

Dla stacjonarnego szumu gaussowskiego

$$\Gamma_{ij} = \left(\frac{\partial h}{\partial \theta_i} \middle| \frac{\partial h}{\partial \theta_j} \right). \quad (11.23)$$