Wstęp do teorii procesów stochastycznych:
zadania przygotowujące do kolokwium zaliczeniowego

Wszystkie procesy stochastyczne rozważane w zadaniach 1–6 są *rzeczywistymi* procesami stochastycznymi.

1. Proces stochastyczny (X_t) zdefiniowany jest następująco:

$$\mathsf{X}_t = \mathsf{A}\cos\omega t + \mathsf{B}\sin\omega t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie ω jest stałą dodatnią, zaś A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi, każda o standardowym rozkładzie normalnym (rozkład standardowy ma wartość oczekiwaną równą 0 i wariancję równą 1). Znaleźć wartość oczekiwaną i funkcję autokorelacji procesu stochastycznego (X_t).

2. Proces stochastyczny (X_t) zdefiniowany jest następująco:

$$\mathsf{X}_t = \mathsf{A}\cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie ω jest stałą dodatnią, A jest zmienną losową mogącą z równym prawdopodobieństwem przyjąć jedną z dwóch wartości $+1$ albo -1, zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$, zmienne losowe A i Θ są niezależne. Wykazać, że proces stochastyczny (X_t): (i) jest stacjonarny w szerszym sensie; (ii) jest procesem o ergodycznej średniej; (iii) nie jest procesem ergodycznym $\big($wskazówka: porównać $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t^2)$ i $\langle x^2(t)\rangle\big)$.

3. Rozważyć proces stochastyczny

$$\mathsf{Y}_t = \mathsf{A}\cos(\omega t + \Phi), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie ω jest dodatnią stałą, zaś A i Φ są niezależnymi zmiennymi losowymi. Zmienna losowa A ma wartość oczekiwaną równą 3 i wariancję równą 9, natomiast Φ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle -\pi; \pi)$. Czy proces (Y_t) jest procesem o ergodycznej średniej? Wykazać, że (Y_t) nie jest procesem ergodycznym $\big($wskazówka: porównać $\mathsf{E}(\mathsf{Y}_t^2)$ i $\langle y^2(t)\rangle\big)$.

4. Dwa procesy stochastyczne (X_t) i (Y_t) zdefiniowane są następująco:

$$\mathsf{X}_t = A_1\cos(\omega_1 t + \Theta_1), \quad \mathsf{Y}_t = A_2\sin(\omega_2 t + \Theta_2), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie A_1, A_2, ω_1 i ω_2 są dodatnimi stałymi, Θ_1 i Θ_2 są zmiennymi losowymi, każda o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$. (i) Zakładając, że zmienne losowe Θ_1 i Θ_2 są niezależne, obliczyć funkcję interkorelacji $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2)$ pomiędzy procesami (X_t) i (Y_t) oraz wykazać, że procesy te są procesami łącznie stacjonarnymi w szerszym sensie. (ii) Obliczyć funkcję interkorelacji $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2)$ w przypadku, gdy $\Theta_1 = \Theta_2$. Jaki musi być w tej sytuacji spełniony dodatkowy warunek, by procesy (X_t) i (Y_t) były procesami łącznie stacjonarnymi w szerszym sensie?

5. Stacjonarny w szerszym sensie proces stochastyczny (Y_t) ma funkcję autokorelacji postaci

$$R_{\mathsf{Y}}(\tau) = \begin{cases} R_0\left(1 - \dfrac{|\tau|}{\tau_0}\right), & -\tau_0 \le \tau \le \tau_0, \\ 0, & \tau < -\tau_0 \ \text{lub} \ \tau > \tau_0, \end{cases}$$

gdzie $R_0 > 0$ i $\tau_0 > 0$ są stałymi. Obliczyć widmową gęstość mocy $S_{\mathsf{Y}}(f)$ procesu stochastycznego (Y_t). Naszkicować wykresy funkcji R_{Y} i S_{Y}.

6. Znaleźć funkcję autokorelacji $R_{\mathsf{Z}}(\tau)$ stacjonarnego w szerszym sensie procesu stochastycznego (Z_t), którego widmowa gęstość mocy ma postać

$$S_{\mathsf{Z}}(f) = \begin{cases} S_0, & -f_0 \le f \le f_0, \\ 0, & f < -f_0 \ \text{lub} \ f > f_0, \end{cases}$$

gdzie $f_0 > 0$ i $S_0 > 0$ są stałymi. Obliczyć wartość średniokwadratową procesu (Z_t). Naszkicować wykresy funkcji R_{Z} i S_{Z}.

Rozwiązania. 1. $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t) = 0$, $K_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = \cos[\omega(t_1 - t_2)]$. **2.** $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t) = 0$, $K_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\cos[\omega(t_1 - t_2)]$; $\langle x(t)\rangle = 0$, (X_t) jest procesem o ergodycznej średniej; $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t^2) = \frac{1}{2}$, $\langle x^2(t)\rangle = \frac{1}{2}a^2$. **3.** $\mathsf{E}(\mathsf{Y}_t) = \langle y(t)\rangle = 0$, (Y_t) jest procesem o ergodycznej średniej; $\mathsf{E}(\mathsf{Y}_t^2) = 9$, $\langle y^2(t)\rangle = \frac{1}{2}a^2$. **4.** (i) $\mathsf{E}(\mathsf{X}_t) = \mathsf{E}(\mathsf{Y}_t) = 0$, $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2) = 0$; (ii) $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}A_1A_2\sin(\omega_2 t_2 - \omega_1 t_1)$. **5.** $S_{\mathsf{Y}}(f) = R_0\sin^2(\pi\tau_0 f)/(\pi^2\tau_0 f^2)$, $-\infty < f < +\infty$. **6.** $R_{\mathsf{Z}}(\tau) = S_0\sin(2\pi f_0\tau)/(\pi\tau)$, $-\infty < \tau < +\infty$; $\mathsf{E}(\mathsf{Z}_t^2) = 2f_0S_0$.