Wstęp do teorii procesów stochastycznych: seria 1 zadań

1. Proces stochastyczny (X_t) z czasem ciągłym zdefiniowany jest następująco:

$$\mathsf{X}_t := \mathsf{K}\cos\omega t, \quad t \geq 0,$$

gdzie $\omega > 0$ jest stałą, natomiast K jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\rangle$. Znaleźć wartość oczekiwaną, funkcję autokorelacji i funkcję autokowariancji procesu stochastycznego (X_t).

2. Proces stochastyczny (X_t) z czasem ciągłym zdefiniowany jest następująco:

$$\mathsf{X}_t := A\cos(\omega t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie $A > 0$ i $\omega > 0$ są stałymi, zaś Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$. Wykazać, że proces stochastyczny (X_t) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie.

3. Wykazać, że następujący proces stochastyczny (X_t) z czasem ciągłym jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie:

$$\mathsf{X}_t := \mathsf{A}\cos\omega t + \mathsf{B}\sin\omega t, \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie $\omega > 0$ jest stałą , zaś A i B są niezależnymi zmiennymi losowymi przyjjmującymi wartość -2 z prawdopobieństwem $1/3$ i wartość 1 z prawdopobieństwem $2/3$.

4. Rozważmy ciąg losowy (X_n), $n = 0, 1, 2, \ldots$, w którym zmienna losowa X_0 ma rozkład Laplace'a z parametrem $\lambda = \sqrt{2}$ (zmienna losowa o rozkładzie Laplace'a jest ciągłą zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa $p(x) := \frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x|)$, $-\infty < x < +\infty$), natomiast zmienne losowe X_n dla $n \geq 1$ mają rozkład $\mathsf{N}(0, 1)$, wszystkie zmienne losowe X_n są niezależne. Wykazać, że (X_n) jest procesem stacjonarnym w szerszym sensie i że <u>nie jest</u> procesem ściśle stacjonarnym (wskazówka: zbadać wartości oczekiwane $\mathsf{E}(\mathsf{X}_n^k)$ dla $k = 1, 2, 3, 4$).

5. Dwa procesy stochastyczne (X_t) i (Y_t) zdefiniowane są następująco:

$$\mathsf{X}_t = A\cos(\omega_0 t + \Theta), \quad \mathsf{Y}_t = B\sin(\omega_0 t + \Theta), \quad -\infty < t < +\infty,$$

gdzie A, B i ω_0 są dodatnimi stałymi, Θ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na odcinku $\langle 0; 2\pi)$. Pokazać, że (X_t) i (Y_t) są procesami łącznie stacjonarnymi w szerszym sensie: (i) znaleźć funkcje interkorelacji $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2)$ oraz $K_{\mathsf{YX}}(t_1, t_2)$ pomiędzy procesami (X_t) i (Y_t) i pokazać, że zależą one wyłącznie od $t_1 - t_2$; (ii) znaleźć funkcje R_{XY} oraz R_{YX} zdefiniowane następująco: $R_{\mathsf{XY}}(\tau) := K_{\mathsf{XY}}(t, t-\tau)$, $R_{\mathsf{YX}}(\tau) := K_{\mathsf{YX}}(t, t-\tau)$.

Rozwiązania. 1. $m_{\mathsf{X}}(t) = \cos\omega t$, $K_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = \frac{4}{3}\cos\omega t_1 \cos\omega t_2$, $C_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = \frac{1}{3}\cos\omega t_1\cos\omega t_2$. **2.** $m_{\mathsf{X}}(t) = 0$, $K_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}A^2\cos[\omega(t_1 - t_2)]$. **3.** $m_{\mathsf{X}}(t) = 0$, $K_{\mathsf{X}}(t_1, t_2) = 2\cos[\omega(t_1 - t_2)]$. **4.** $\mathsf{E}(\mathsf{X}_n) = 0$ i $K_{\mathsf{X}}(m, n) = \delta_{m-n,0}$ dla wszystkich $m, n = 0, 1, 2, \ldots$; $\mathsf{E}(\mathsf{X}_n^2) = 1$ i $\mathsf{E}(\mathsf{X}_n^3) = 0$ dla $n \geq 0$; $\mathsf{E}(\mathsf{X}_0^4) = 6$ i $\mathsf{E}(\mathsf{X}_n^4) = 3$ dla $n \geq 1$. **5.** $K_{\mathsf{XY}}(t_1, t_2) = -\frac{1}{2}AB\sin[\omega_0(t_1 - t_2)]$, $K_{\mathsf{YX}}(t_1, t_2) = \frac{1}{2}AB\sin[\omega_0(t_1 - t_2)]$.